运筹学 Hw1

习题1.1：~~假~~ 对 $f(x)$ 作 Taylor 展开，有

$$f(x)=f(\bar{x})+\nabla f(\bar{x})^T(x-\bar{x})+\frac{1}{2}(x-\bar{x})^T\nabla^2 f(\bar{x})(x-\bar{x})+o(\|x-\bar{x}\|^2)$$

即：
$$\frac{f(x)-f(\bar{x})}{\|x-\bar{x}\|^2}=\frac{1}{2}\frac{(x-\bar{x})^T}{\|x-\bar{x}\|}\nabla^2 f(\bar{x})\frac{(x-\bar{x})}{\|x-\bar{x}\|}+\frac{o(\|x-\bar{x}\|^2)}{\|x-\bar{x}\|^2}.$$

若 $\lambda>0$ 是 $\nabla^2 f(\bar{x})$ 的最小特征值，选择 $\varepsilon>0$ 使得

$$\left|\frac{o(\|x-\bar{x}\|^2)}{\|x-\bar{x}\|^2}\right|\leq\frac{\lambda}{4}$$，当 $\|x-\bar{x}\|<\varepsilon$ 时

则对 $\forall\ \|x-\bar{x}\|<\varepsilon$ 都有：
$$\frac{f(x)-f(\bar{x})}{\|x-\bar{x}\|^2}\geq\frac{1}{2}\lambda+\frac{o(\|x-\bar{x}\|^2)}{\|x-\bar{x}\|^2},$$
$$\geq\frac{1}{4}\lambda$$

取 $\alpha=\frac{1}{4}\lambda$，则有 $f(x)\geq f(\bar{x})+\alpha\|x-\bar{x}\|^2$，当 $\|x-\bar{x}\|<\varepsilon$ 时。

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ 为局部最优解。

习题1.2：因为 ~~$f(x)=$~~ $f(x,y)=y$ 对应的 Hessian 阵为

$H=\begin{bmatrix}0, & 0\\ 0, & 0\end{bmatrix}$ 是半正定的，则有原函数为凸函数 $\Rightarrow$ 凸问题；

可行解 $x^*=[0,0]$　　$c_1(x)=[x-1]^2+y^2-1$　　$c_2(x)=(x+1)^2+y^2-1$

$\nabla c_1(x^*)=[-2,0]$　　$\nabla c_2(x^*)=[2,0]$ 线性相关

$\Rightarrow$ 不满足 LICQ 条件。

拉格朗日函数为 $L(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=y+\lambda_1[(x-1)^2+y^2-1]+\lambda_2[(x+1)^2+y^2-1]$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2\lambda_1(x-1)+2\lambda_2(x+1)$$

代入 $x^*=[0,0]$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=1+2\lambda_1 y+2\lambda_2 y$$ $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y}\neq 0$ KKT 条件不成立！

2.1：一方面，$P \subseteq Q$ 因为 $x \in R^n$，$Ax=b$，$(x \geq 0)$

自然有对应的 $\hat{A}x=\hat{b}$，$x \geq 0$.

另一方面，$\hat{A}$的行向量组成 A的极大线性无关组

若 $\hat{A}x=\hat{b}$ 对 $A \setminus \hat{A}$ 的任一行向量，可写作 $\hat{A}$中线性组合

自然也有 $Ax=b$． 于是 $Q \subseteq P$ 综上 $P=Q$.

2.2：设 x 是这个LP问题的一个BFS；下证其为K的顶点.

$\because x$为BFS；$\exists$ 集合 $B \subseteq [n]$，$|B|=m$；使得 A_B线性无关；

$A_B x_B = b$；$x_N = 0$ $(N=[n]\setminus B)$ 对 $j=1,\dots,n$，定义

$$c_j = \begin{cases} 0, & j \in B \\ 1, & j \in N. \end{cases}$$

注意，$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = 0^T x_B + c_N^T 0 = 0$.

对 $y \in K$，有 $y \geq 0$，$c \geq 0$ 则 $c^T y \geq 0 = c^T x$.

进一步的，若 $c^T y = 0$．则 $y_j = 0$，$\forall j \in N$．所以 $A_B y_B = b = A_B x_B$.

左乘 A_B^{-1} $\Rightarrow$ $y_B = A_B^{-1} b = x_B$．因此 x是K中唯一使得 $c^T x = 0$ 的

$\Rightarrow$ x为K的顶点.

2.3： 将原问题标准化，则有

$$\begin{cases} \min -x_1+3x_2 \\ s.t\quad x_1+2x_2+x_3=8 \\ x_2+x_4=2 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0 \end{cases}$$

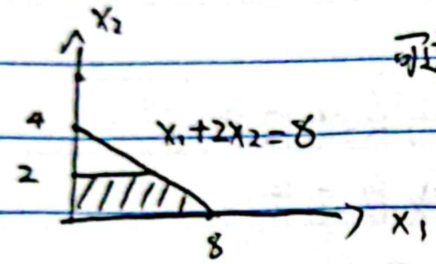
令 $A=\begin{pmatrix}1,2,1,0\\0,1,0,1\end{pmatrix}$，$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$，$b=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \quad \min -x_1+3x_2$$
$$s.t\quad Ax=b$$
$$x\geq 0.$$

取B为A的二阶可逆子阵，得到

得到所有~~可行~~基解为 $\begin{cases} x^{(1)}=(4,2,0,0)^T \\ x^{(2)}=(8,0,0,2)^T \\ x^{(3)}=(0,2,4,0)^T \\ x^{(4)}=(0,0,8,2)^T. \end{cases}$

$x^{(5)}=(0,4,0,-2)^T$ (舍去).



画图发现以上均为极点.

习题2.4： 将问题化为标准形：

$$\min -4x_1-x_2$$
$$s.t\quad -x_1+2x_2+x_3=4$$
$$2x_1+3x_2+x_4=12$$
$$x_1-x_2+x_3=3 \qquad x_1,x_2,x_3\ldots x_5\geq 0$$

标准形式下约束矩阵为：

$$\left(\begin{array}{c|c} -1,2,1,0,0 & 4 \\ 2,3,0,1,0 & 12 \\ 1,-1,0,0,1 & 3 \end{array}\right)$$

所以 $x=(0,0,4,12,3)$ 是一个可行基解.

~~进行最优性检验：~~

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	-4	-1	0	0	0
$x_3=4$	-1	2	1	0	0
$x_4=12$	2^*	3	0	1	0
$x_5=3$	1	-1	0	0	1

~~初始单纯形表~~

画出初始单纯形表：

	c_j		4	1	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	4	-1	2	1	0	0	2 *
0	x_4	12	2	3	0	1	0	4 *
0	x_5	3	1	-1	0	0	1	3
	σ_j		4^*	1	0	0	0	

所以 x_1 换入，x_5 换出；重复以上过程，最终得到最优解 $(\frac{21}{5}, \frac{6}{5})^T$，最优值 18.

2.5：证明：

$$(LP)\quad \begin{aligned} &\min\ c^Tx \\ &s.t\ \ Ax \geq b \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (DP)\quad \begin{aligned} &\max\ b^Tw \\ &s.t\ \ A^Tw \leq c \\ &\qquad w \geq 0 \end{aligned}$$

$$(LP)\quad \begin{aligned} &\min\ c^Tx \\ &s.t\ \ Ax \leq b \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (DP)\quad \begin{aligned} &\max\ b^Tw \\ &s.t\ \ A^Tw \geq c \\ &\qquad w \geq 0 \end{aligned}$$

因此对偶的对偶是原问题.

扫描全能王 创建

对偶

5

$\lambda \in R^m$

推导：定义 Lagrange 函数 $L(x,\lambda,\mu) = c^T x + \lambda^T(b - Ax) - \mu^T x, \mu \geq 0$

对无约束问题 $\min\limits_{x \in R^n} L(x,\lambda,\mu)$，记 $g(\lambda,\mu) = \min\limits_{x \in R^n} L(x,\lambda,\mu)$

$$g(\lambda,\mu) \leq c^T \bar{x} + \lambda^T(b - A\bar{x}) - \mu^T x \leq c^T \bar{x}$$

可 $\min\limits_{x \in R^n} L(x,\lambda,\mu) = \begin{cases} b^T\lambda & \text{if } A^T\lambda + \mu = c \\ -\infty, & \text{otherwise} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{array}{l} \max\ b^T\lambda \\ s.t\ A^T x \leq c \end{array}$ 另一边同理。