可知 $X$ 为 $\triangle BCE$ 的垂心, 从而 $CX\perp BD$, 即 $AC\perp BD$. $\square$

**7.** 设正整数 $n=2^{\alpha}\cdot q$, 其中 $\alpha$ 为非负整数, $q$ 为奇数. 证明: 对任意正整数 $m$, 方程 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=m$ 的整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的个数能被 $2^{\alpha+1}$ 整除.

(王广廷 供题)

**证法一** 设方程 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=m$ 的解的个数为 $N(m)$. 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是方程 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=m$ 的一个非负整数解. 不妨设其中有 $k$ 个非零项, 注意到 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的每个分量有正负两种情况, 则恰好对应原方程的 $2^k$ 个整数解. 设 $S_k$ 是该方程的恰有 $k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 个非零项的非负整数解的个数. 则

$$N(m)=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot S_k.$$

因为 $k$ 个非零项的非负整数解有 $\binom{n}{k}$ 种位置可选, 故 $\binom{n}{k}\mid S_k$.

故要证明 $2^{\alpha+1}\mid N(m)$, 只需证明: $2^{\alpha-k+1}\mid\binom{n}{k}$.

注意到 $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, 分子中 2 的因子个数至少为 $\alpha$, 而分母中的 2 的因子个数为

$$\sum_{i=1}^{[\log_2 k]}[\frac{k}{2^i}]<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k}{2^i}=k,$$

故分母的 2 的因子至多有 $k-1$ 个, 所以 $2^{\alpha-k+1}\mid\binom{n}{k}$. 即 $2^{\alpha-k+1}\mid N(m)$. $\square$

**评注** 这个问题中要证明 $2^{\alpha-k+1}\mid\binom{n}{k}$, 实际也可以用 Kummer 定理处理. Kummer 定理是指: 设 $n,i$ 是正整数且 $i\le n$, $p$ 是素数, 则 $p^t\parallel\binom{n}{k}$ 当且仅当在 $p$ 进制中, $(n-i)+i$ 发生了至多 $t$ $(t\ge 0)$ 次进位.

**证法二** 记 $f(n,m)$ 为该方程整数解的个数. 首先证明如下关于 $f(n,m)$ 的递推关系:

引理 $\quad f(2n,m)=2f(n,m)+\sum\limits_{k=1}^{m-1}f(n,k)f(n,m-k)$.

引理证明 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$ 是方程 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{2n}^2=m$ 的一个解. 设

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=k.$$

若 $k=0$, 则 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(0,0,\cdots,0)$, 且 $x_{n+1}^2+x_{n+2}^2+\cdots+x_{2n}^2=m$, 这样的 $(x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{2n})$ 有 $f(n,m)$ 组. 故当 $k=0$ 时, 原方程有 $f(n,m)$ 组解.

同理可知, 当 $k=m$ 时, 原方程也有 $f(n,m)$ 组解.

当 $1\le k\le m-1$ 且 $k$ 为正整数时, 方程 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=k$ 有 $f(n,k)$