

不妨设 $x_1 = 0$ 或 $x_1 + x_2 = 0$.

情形 1 $x_1 = 0$. 此时原不等式

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sum_{i,j=2}^n \sqrt{|x_i - x_j|} + 2 \cdot \sum_{i=2}^n \sqrt{|x_i|} \leq \sum_{i,j=2}^n \sqrt{|x_i + x_j|} + 2 \cdot \sum_{i=2}^n \sqrt{|x_i|} \\ &\Leftrightarrow \sum_{i,j=2}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i,j=2}^n \sqrt{|x_i + x_j|}, \end{aligned}$$

由归纳假设, 原不等式成立.

情形 2 $x_1 + x_2 = 0$. 此时原不等式等价于

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^2 \sqrt{|x_i - x_j|} + \sum_{i,j=3}^n \sqrt{|x_i - x_j|} + 2 \cdot \sum_{i=3}^n (\sqrt{|x_1 - x_i|} + \sqrt{|x_2 - x_i|}) \\ &\leq \sum_{i,j=1}^2 \sqrt{|x_i + x_j|} + \sum_{i,j=3}^n \sqrt{|x_i + x_j|} + 2 \cdot \sum_{i=3}^n (\sqrt{|x_1 + x_i|} + \sqrt{|x_2 + x_i|}) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{i=3}^n (\sqrt{|x_1 - x_i|} + \sqrt{|x_2 - x_i|}) &= 2 \cdot \sum_{i=3}^n (\sqrt{|-x_2 - x_i|} + \sqrt{|-x_1 - x_i|}) \\ &= 2 \cdot \sum_{i=3}^n (\sqrt{|x_1 + x_i|} + \sqrt{|x_2 + x_i|}) \end{aligned} \quad (1)$$

对 $(x_1, x_2), (x_3, \dots, x_n)$ 分别用归纳假设知

$$\sum_{i,j=1}^2 \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i,j=1}^2 \sqrt{|x_i + x_j|} \quad (2)$$

$$\sum_{i,j=3}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i,j=3}^n \sqrt{|x_i + x_j|} \quad (3)$$

(1) + (2) + (3) 知原不等式也成立.

综上, 由归纳法, 原题得证.

评注 本题是困难的不等式. 本题需观察到可以作调整 $x_i \rightarrow x_i + d (\forall i)$, 这样调整后就可以归纳了. 其中的调整有多种可能的调整方法, 需尝试, 并选择一种可用的. 本题还有一些其他的 (超出竞赛范畴的) 解法, 例如本题形式上和著名不等式 $\sum \frac{a_i a_j}{i+j} \geq 0$ 比较像, 从而可能尝试积分, 但所需用到的积分公式是竞赛选手不知道的.

本题中“调整平移+归纳”的方法也可以用来解决 2009 年集训队测试第 1 天第 3 题:

$$2XY \cdot \sum |x_i - y_j| \geq X^2 \cdot \sum |y_i - y_j| + Y^2 \cdot \sum |x_i - x_j|$$

3. 设 D 是锐角三角形 ABC ($AB > AC$) 内部一点, 使得 $\angle DAB = \angle CAD$. 线段 AC 上的点 E 满足 $\angle ADE = \angle BCD$, 线段 AB 上的点 F 满足 $\angle FDA =$