It is presented a consistent relativistic theory of spectra of the pionic atoms on the basis of the Klein-Gordon-Fock with a generalized radiation and strong pion-nuclear potentials. It is applied to calculation of the energy and spectral parameters for pionic atoms of the $^{208}$Pb with accounting for the radiation ( vacuum polarization), nuclear ( finite size of a nucleus ) and the strong pion-nuclear interaction corrections. The measured values of the Berkley, CERN and Virginia laboratories and alternative data based on other versions of the Klein-Gordon-Fock theories with taking into account for a finite size of the nucleus in the model uniformly charged sphere and the standard Uehling-Serber radiation correction and optical atomic theory are listed too. There are listed new data on shift and broadening of the 4f level in $^{208}$Pb due to the strong pion-nuclear interaction.

1. Introduction

In papers [1-3] we have presented a new relativistic method of the Klein-Gordon-Fock equation with an generalized pion-nuclear potential to determine transition energies in spectroscopy of light, middle and heavy pionic atoms with accounting for the strong interaction effects. In this paper, which goes on our studying on spectroscopy of pionic atoms, we firstly applied method [1-3] to calculating calculation of the energy and spectral parameters for pionic atom of the $^{208}$Pb with accounting for the radiation ( vacuum polarization), nuclear ( finite size of a nucleus ) and the strong pion-nuclear interaction corrections. There are listed new data on shift and broadening of the 4f level in $^{208}$Pb due to the strong pion-nuclear interaction.

Following [1-3], let us remind that spectroscopy of hadron atoms has been used as a tool for the study of particles and fundamental properties for a long time. Exotic atoms are also interesting objects as they enable to probe aspects of atomic and nuclear structure that are quantitatively different from what can be studied in electronic or “normal” atoms. At present time one of the most sensitive tests for the chiral symmetry breaking scenario in the modern hadron’s physics is provided by studying the exotic hadron-atomic systems. Nowadays the transition energies in pionic (kaonic, muonic etc.) atoms are measured with an unprecedented precision and from studying spectra of the hadronic atoms it is possible to investigate the strong interaction at low energies measuring the energy and natural width of the ground level with a precision of few meV [1-20]. The strong interaction is the reason for a shift in the energies of the low-lying levels from the purely electromagnetic values and the finite lifetime of the state corresponds to an increase in the observed level width. For a long time the similar experimental investigations have been carried out in the laboratories of Berkley, Virginia (USA), CERN (Switzerland). The most known theoretical models to treating the hadronic (pionic, kaonic, muonic, antiprotonic etc.) atomic systems are presented in refs. [21-48]. The most difficult aspects of the theoretical modeling are reduced to the correct description of pion-nuclear strong interaction [1-3] as the electromagnetic part of the problem is reasonably accounted for.
2. Relativistic approach to pionic atoms spectra

As the basis’s of a new method has been published, here we present only the key topics of an approach [1-3]. All available theoretical models to treating the hadronic (kaonic, pionic) atoms are naturally based on using the Klein-Gordon-Fock equation [2,5], which can be written as follows:

\[ m^2c^2\Psi(x) = \left\{ \frac{1}{c^2}\left[ i\hbar\partial_t + eV_0(r) \right]^2 + \hbar^2\nabla^2 \right\}\Psi(x) \]  

(1)

where \( c \) is a speed of the light, \( \hbar \) is the Planck constant, and \( \Psi_0(x) \) is the scalar wave function of the space-temporal coordinates. Usually one considers the central potential \( [V_0(r), 0] \) approximation with the stationary solution:

\[ \Psi(x) = \exp(-iEt/\hbar)\varphi(x), \]  

(2)

where \( \varphi(x) \) is the solution of the stationary equation:

\[ \left\{ \frac{1}{c^2}[E + eV_0(r)]^2 + \hbar^2\nabla^2 - m^2c^2 \right\}\varphi(x) = 0 \]  

(3)

Here \( E \) is the total energy of the system (sum of the mass energy \( mc^2 \) and binding energy \( e_0 \)). In principle, the central potential \( V_0 \) naturally includes the central Coulomb potential, the vacuum-polarization potential, the strong interaction potential. The most direct approach to treating the strong interaction is provided by the well known optical potential model (c.g. [2]). The nuclear potential for the spherically symmetric density \( \rho(r|R) \) is [13-15]:

\[ V_{\text{nuc}}(r|R) = -\left( \frac{1}{4\pi}\right) \int dr' r'^2 \rho(r'|R) + \int_0^\infty dr' r' \rho(r'|R) \]  

(4)

The most popular Fermi-model approximation the charge distribution in the nucleus \( \rho(r) \) is:

\[ \rho(r)\approx \rho_0 / [1 + \exp((r-c)/a)], \]  

(5)

where the parameter \( a=0.523 \) fm, the parameter \( c \) is chosen by such a way that it is true the following condition for average-squared radius:

\[ <r^2>^{1\over 2} = (0.836 \cdot 4^{1/3} + 0.5700) \text{ fm}. \]

The effective algorithm for its definition is used in refs. [12] and reduced to solution of the following system of the differential equations with the corresponding boundary conditions. Another, probably, more consistent approach is in using the relativistic mean-field (RMF) model, which been designed as a renormalizable meson-field theory for nuclear matter and finite nuclei [21]. The detailed presentation of our method for construction of the many-body relativistic perturbation theory with accounting for relativistic, exchange-correlation, nuclear and radiative (QED) effects is presented in Refs. [41-77]. Here we note that to account QED effect, namely, the vacuum polarization one we have used the generalized Uehling-Serber potential with modification to take into account the high-order corrections.

The most difficult aspect is an adequate account for the strong interaction. On order to describe the strong \( \pi N \) interaction we have used the optical potential model in which the generalized Ericson-Ericson potential is as follows:

\[ V_{\pi N} = V_{\text{opt}}(r) = -\frac{4\pi}{2m} \left\{ q(r)\nabla \frac{a(r)}{1 + 4/3\pi \xi a(r)} \nabla \right\} \]  

(9)

\[ q(r) = \left( 1 + \frac{m}{m_N} \right)b_0\rho(r) + b_1 \left[ \rho_\pi(r) - \rho_\rho(r) \right] + \left( 1 + \frac{m}{2m_N} \right)b_2 \rho^2(r) + b_3 \rho(r) \rho_\pi(r) \]  

(10)

\[ a(r) = \left( 1 + \frac{m}{m_N} \right)^{-1} c_0 \rho(r) + c_1 \left[ \rho_\pi(r) - \rho_\rho(r) \right] \]  

(11)

Here \( \rho_\pi(r) = \text{distribution of a density of the protons and neutrons, respectively, } \xi \text{ – parameter} \) \( (\xi = 0 \text{ corresponds to case of “no correlation”}, \xi = 1, \text{ if anticorrelations between nucleons}); \) respectively isoscalar and isovector parameters \( b_0, b_0, c_0, b_1, c_1, b_2, C_0, B_1, C_1 \text{ – are corresponding to the s-wave and p-wave (repulsive and attracting potential member) scattering length in the combined spin-isospin space with taking into account the} \)
absorption of pions (with different channels at p-p pair $B_{0}(p)$ and p-n pair $B_{0}(n)$), and isospin and spin dependence of an amplitude $\pi N$ scattering

$$\left(h_{0,0}(r) - h_{0,0}(r) + 2 \left[ \rho_{p}(r) - \rho_{n}(r) \right] \right),$$

the Lorentz-Lorentz effect in the p-p interaction. For the pionic atom with remained electron shells the total wave-function is a product of the product Slater determinant of the electrons subsystem (Dirac equation) and the pionic wave function. In whole the energy of the hadronic atom is represented as the sum:

$$E \approx E_{KG} + E_{FS} + E_{VP} + E_{N};$$  \hspace{1cm} (12)

Here $E_{KG}$ is the energy of a pion in a nucleus $(Z, A)$ with the point-like charge (dominative contribution in (12)), $E_{FS}$ is the contribution due to the nucleus finite size effect, $E_{VP}$ is the radiation correction due to the vacuum-polarization effect, $E_{N}$ is the energy shift due to the strong interaction $V_{N}$.

The strong pion-nucleus interaction contribution can be found from the solution of the Klein-Gordon-Fock equation with the corresponding pion-nucleon potential. The detailed description and analysis of different aspects of the computational procedure can be found in Refs. [1-4,48-75].

3. Results and conclusions

In table 1 our data on the $4f-3d$, $5g-4f$ transition energies for pionic atom of $^{208}$Pb are presented. The measured values of the CERN and alternative data based on other versions of the Klein-Gordon-Fock theories with taking into account for a finite size of the nucleus in the model uniformly charged sphere and the standard Uehling-Serber radiation correction and optical atomic theory are listed too [2-10]. In table 2 we present data on the shift and broadening (keV) of the 4f level due to the strong pion-nuclear interaction [2-8].

| Trans. | CERN Exp | $E_{N}$ [14, 18] | $E_{N}$, Our data |
|--------|----------|------------------|------------------|
| $4f-3d$ | $1282 \pm 2.2$ | $1261.23$ | $1281.78$ |
| $5g-4f$ | $575.46 \pm 0.04$ | - | $575.78$ |

Here we use the short designation of the $V_{SN}$: potential parameter sets: Tauscher, -Taul; Tauscher, -Taul2; Batty etal-Bat ; Seki etal- Sek; Laat-Konijn etal - Laat, Our set – our.

Our parameterization $V_{SN}$ upheld options that are the most reliably determined $(B_{p}, c_{p}, c_{i}, C_{h})$. The potential parameters whose values differ greatly in different sets, in particular, $b_{1}$ ($b_{1} = -0.094$) plus not included still to the $V_{SN}$ parameter set (Im$B_{1}$, Im$C_{1}$) were optimized by calculating the strong dependencies shifts for the pionic $\pi^{0}$Ne,$^{24}$Mg, $^{93}$Nb,$^{133}$Cs,$^{175}$Lu,$^{181}$Ta,$^{197}$Au,$^{208}$Pb atoms upon the values of $b_{1}$, Im$B_{1}$,Im$C_{1}$; further the selected these values meet the standard deviation of the least reliable experimental values.

The analysis of the presented data indicate on the importance of the correct accounting for the radiation (vacuum polarization) and the strong pion-nuclear interaction corrections. Obviously, it is clear that that the contributions provided by the finite size effect should be accounted in a precise theory. Besides, taking into account the increasing accuracy of the X-ray pionic atom spectroscopy experiments, it can be noted that knowl-
edge of the exact electromagnetic theory data will make more clear the true values for parameters of the pion-nuclear potentials and correct the disadvantage of widely used parameterization of the potentials (9)-(11).

References

1. Bystryantseva A.N., Khetselius O.Yu., Dubrovskaya Yu.V., Vitavetskaya L.A., Berestenko A., Relativistic theory of spectra of heavy pionic atomic systems with account of strong pion-nuclear interaction effects: $^{90}$Nb, $^{172}$Yb, $^{181}$Ta, $^{197}$Au // Photoelectronics.-2016.-Vol.25.-P.56-61
2. Serga I.N., Dubrovskaya Yu.V., Kvasikova A., Shakhan A.N., Sukharev A., Spectroscopy of hadronic atoms: Energy shifts// Journal of Physics: C Ser. (IOP).-2012.-Vol.397.-P.012013 (5p.).
3. Khetselius O.Yu., Hyperfine Structure, scalar-pseudoscalar interaction and parity non-conservation effect in some heavy atoms and ions/Khetselius O.Yu., Florko T.A., Nikola L.V., Svinarenko A.A., Serga I.N., Tkach T.B., Mischenko E.V. // Quantum Theory: Reconsidertion of Foundations (AIP).-2010.-Vol.1232.-P.243-250.
4. Deslattes R., Kessler E., Indelicato P., de Billy L., Lindroth E., Anton J., Exotic atoms// Rev. Mod. Phys. -2003.-Vol.75.-P.35-70.
5. Scherer S, Introduction to chiral perturbation theory//Advances in Nuclear Physics, Eds. J.W. Negele and E.W. Vogt (Berlin, Springer).-2003.-Vol.27.-P.5-50.
6. Lyubovitskij V., Rusetsky A., πp atom in ChPT: Strong energy-level shift/ // Phys. Lett.B.-2000.-Vol.494.-P.9-13.
7. Anagnostopoulos D., Biri S., Boisbourdain V., Demeter M., Borchert G. et al-PSI, Low-energy X-ray standards from pionic atoms/ //Nucl. Inst. Meth.B.-2003.-Vol.205.-P.9-18.
8. Olaniyi B, Shor A, Cheng S., Dugan G., Wu C.S., Electric quadrupole moments and strong interaction effects in pionic atoms of $^{165}$Ho, $^{175}$Lu, $^{176}$Lu, $^{191}$Hf, $^{181}$Ta //Nucl. Phys. A.-1982.-Vol.403.-P.572-588.
9. Serga I., Relativistic theory of spectra of pionic atoms with account of the Radiative and nuclear corrections// Serga I.N.// Photoelectronics.-2013.-Vol.22.-P.84-92.
10. Kolomeitsev E.E., Kaiser N., Weise W. Chiral dynamics of deeply bound pionic atoms//// Phys. Rev. Lett.-2003.-Vol.90.-P.092501.
11. Khetselius O.Yu., Hyperfine structure of atomic spectra.- Odessa: Astroprint, 2008.-210P.
12. Khetselius O.Yu., Hyperfine structure of radium// Photoelectronics.-2005.-N14.-P.83-85.
13. Khetselius O., Spectroscopy of cooperative electron-gamma-nuclear processes in heavy atoms: NEET effect// J. Phys.: Conf. Ser.-2012.-Vol.397.-P.012012
14. Khetselius O.Yu., Florko T.A., Svinarenko A.A., Tkach T.B., Radiative and collisional spectroscopy of hyperfine lines of the Li-like heavy ions and TI atom in an atmosphere of inert gas// Phys.Scripta.-2013.-Vol.T153.-P.014037.
15. Khetselius O.Yu., Turin A.V., Sukharev D.E., Florko T.A., Estimating of X-ray spectra for kaonic atoms as tool for sensing the nuclear structure// Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2009.-N1.-P.30-35.
16. Khetselius O.Yu., On possibility of sensing nuclei of the rare isotopes by means of laser spectroscopy of hyperfine structure//Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2008.-Vol.3.-P.28-33.
17. Glushkov A.V., Malinovskaya S.V, Gurnitskaya E.P., Khetselius O.Yu., Dubrovskaya Yu.V., Consistent quantum theory of the recoil induced excitation and ionization in atoms during capture of neutron// Journal of Physics: Conf. Series (IOP).-2006.- Vol.35.-P.425-430.
18. Glushkov A.V., Khetselius O.Y., Brusensteva S.V., Zaichko P.A., Ternovsky
V.B., Studying interaction dynamics of chaotic systems within a non-linear prediction method: application to neurophysiology// Advances in Neural Networks, Fuzzy Systems and Artificial Intelligence, Ser: Recent Adv. in Computer Engineering, Ed. J.Balicki.-2014.-Vol.21.-P.69-75.

19. Khetselius O.Yu., Quantum Geometry: New approach to quantization of the quasistationary states of Dirac equation for super heavy ion and calculating hyper fine structure parameters// Proc. Int.Geometry Center.-2012.-Vol.5,№ 3-4.-P.39-45.

20. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Svinarenko A., Theoretical spectroscopy of autoionization resonances in spectra of lanthanide atoms// Physica Scripta.-2013.-Vol.T153.-P.014029.

21. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Gurnitskaya E.P., Loboda A.V., Sukharev D.E., Relativistic quantum chemistry of heavy ions and hadronic atomic systems: spectra and energy shifts// Theory and Applications of Computational Chemistry. AIP Conference Proceedings.-2009.-Vol.1102.-P.168-171.

22. Khetselius O.Yu., Relativistic calculating the spectral lines hyperfine structure parameters for heavy ions// Spectral Line Shapes, AIP Conf. Proc.-2008.-Vol.1058.-P.363-365.

23. Khetselius O.Yu., Glushkov A.V., Gurnitskaya E.P., Loboda A.V., Mischenko E.V., Florko T.A., Sukharev D.E., Collisional Shift of the TI hyperfine lines in atmosphere of inert gases// Spectral Line Shapes, AIP Conf. Proc.-2008.-Vol.1058.-P.231-233.

24. Khetselius O.Yu., Hyperfine structure of energy levels for isotopes $^{73}$Ge, $^{75}$As, $^{201}$Hg// Photoelectronics.-2007.-N16.-P.129-132.

25. Khetselius O.Y., Gurnitskaya E.P., Sensing the electric and magnetic moments of a nucleus in the N-like ion of Bi// Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2006.-N3.-P.35-39.

26. Khetselius O.Y., Gurnitskaya E.P., Sensing the hyperfine structure and nuclear quadrupole moment for radium// Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2006.-N2.-P.25-29.

27. Florko T.A., Loboda A.V., Svinarenko A.A., Sensing forbidden transitions in spectra of some heavy atoms and multicharged ions: New theoretical scheme// Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2009.-N3.-P.10-15.

28. Sukharev D.E., Khetselius O.Yu., Dubrovskaya Yu.V., Sensing strong interaction effects in spectroscopy of hadronic atoms// Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2009.-N3.-P.16-21.

29. Glushkov A V, Ambrosov S V, Loboda A V, Chernyakova Yu, Svinarenko A, Khetselius O Yu, QED calculation of the superheavy elements ions: energy levels, radiative corrections, and hfs for different nuclear models// Journal Nucl. Phys. A.: nucl. and hadr. Phys.-2004.-Vol.734.-P.21.

30. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Kuzakon V., Prepelitsa G.P., Solyanikova E.P., Svinarenko A., Modeling of interaction of the non-linear vibrational systems on the basis of temporal series analyses (application to semiconductor quantum generators)// Dynamical Systems-Theory and Applications.-2011.-BIF110.

31. Svinarenko A.A., Nikola L. V., Prepelitsa G., Tkach T.B, Mischenko E.V., Auger (autoionization) decay of excited states in spectra of multicharged ions: Relativistic theory// AIP Conf. Proceedings.-2010.-Vol.1290, N1 P.94-98.

32. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Loboda A.V., Ignatenko A., Svinarenko A., Korchevsky D., Lovett L., QED approach to modeling spectra of multicharged ions in a plasma: Oscillator and electron-ion collision strengths// Spectral Line Shapes. AIP Conference Proceedings.-2008.-Vol.1058.-P.175-177.

33. Glushkov A.V., Svinarenko A.A.,
Nuclear quantum optics: Energy approach to multi-photon resonances in nuclei // Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2010.-N2.-P.5-10.

34. Glushkov A.V., Energy approach to resonance states of compound super-heavy nucleus and EPPP in heavy nucleus collisions// Low Energy Antiproton Phys. AIP Conference Proceedings.-2005.-Vol.796.-P.206-210.

35. Malinovskaya S.V., S.V., Dubrovskaya Yu., Vitavetskaya L., Advanced quantum mechanical calculation of the beta decay probabilities// Low Energy Antiproton Phys. AIP Conf. Proc.-2005.-Vol.796.-P.201-205.

36. Glushkov A.V., Ambrosov S.V., Loboda A., Gurnitskaya E.P., Prepelitsa G.P., Consistent QED approach to calculation of electron-collision excitation cross-sections and strengths: Ne-like ions//Int. Journ. Quant. Chem.-2005.-Vol.104, N4. -P. 562-569.

37. Glushkov A.V., Ambrosov S.V., Ignatenko A.V., Korchevsky D.A., DC Strong Field Stark effect for non-hydrogenic atoms: Consistent quantum mechanical approach// Int. Journ. Quant. Chem.-2004.-Vol.99,N6.-P.936-939.

38. Glushkov A.V., Malinovskaya S.V, Chernyakova Y.G., Svinarenko A.A., Cooperative laser-electron-nuclear processes: QED calculation of electron satellites spectra for multi-charged ion in laser field// Int. Journ. Quant. Chem.-2004.-Vol.99,N6.-P.889-893.

39. Glushkov A.V, Khetselius O.Yu, Malinovskaya S.V, Optics and spectroscopy of cooperative laser-electron nuclear processes in atomic and molecular systems - new trend in quantum optics// Europ. Phys. Journ. ST.-2008.-Vol.160, N1.-P.195-204.

40. Glushkov A.V., Dan’kov S.V., Prepelitsa G., Polischuk V.N., Efimov A., Qed theory of nonlinear interaction of the complex atomic systems with laser field multi-photon resonances// Journal of Tech. Phys.-1997.-Vol.38 (2).-P.219-222.

41. Glushkov A.V., Ambrosov S.V., Loboda A.V., Gurnitskaya E.P., Khetselius O.Yu., QED calculation of heavy multicharged ions with account for the correlation, radiative and nuclear effects// Recent Advances in the Theory of Chemical and Physical Systems (Springer).-2006.-Vol.15.-P.285-299.

42. Glushkov A.V., Calculation of parameters of the interaction potential between excited alkali atoms and mercury atoms-the Cs-, Fr-Hg interaction// Optika i Spektr.-1994.-Vol.77 (1).-P.5-10.

43. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Gurnitskaya E.P., Korchevsky D.A., Loboda A.V., Prepelitsa G.P., Sensing the electron-collision excitation cross-sections for Ne-like ions of Fe in a plasma in the Debye shielding approximation// Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2007.-N2.-P.9-13

44. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Gurnitskaya E.P., Florko T.A., Sensing of nuclei available in little quantities by means of laser spectroscopy of hyperfine structure for isotopes: new theoretical scheme (U ,Hg) // Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2007.-N3.-P.8-12.

45. Glushkov A.V., Bunyakova Yu.Ya., Zaitchko P., Geometry of Chaos: Consistent combined approach to treating chaotic dynamics atmospheric pollutants and its forecasting// Proc. International Geometry Center”.-2013.-Vol.6, N3.-P.6-14.

46. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Prepelitsa G.P., Svinarenko A.A., Geometry of Chaos I: Theoretical basis’s of a consistent combined approach//Proc. Int. Geometry Center.-2013.-Vol.6,N1.-P.67-79.

47. Chernyakova Yu.G., Dubrovskaya Yu.V., Florko T.A., Romanova A.V., Vitavetskaya L., An advanced approach to quantization of the quasi stationary states of Dirac-Slater equation// Proc. Int. Geometry Center.-2013.-Vol.6,N2.-P.29-34.

48. Glushkov A.V., Khetselius O., Dubrovskaya Yu.V., Loboda A.V., Sensing
the capture of negative muon by atoms: Energy approach // Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2006.-N4.-P.31-35.

49. Serbov N.G., Glushkov A.V., Bunyakova Yu.Ya., Prepelitsa G.P., Svinarenko A.A., Sensing the kinetical features of energy exchange in mixture CO₂-N₂-H₂O of atmospheric gases under interacting with laser radiation // Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2006.-N4.-P.20-22.

50. Glushkov A.V., Khetselius O.Y., Bunyakova Yu.Ya., Prepelitsa G.P., Solyanikova E.P., Serga E., Non-linear prediction method in short-range forecast of atmospheric pollutants: low-dimensional chaos // Dynamical Systems - Theory and Applications (Lodz).-2011.-LIF111.

51. Khetselius O.Yu., Forecasting evolutionary dynamics of chaotic systems using advanced non-linear prediction method // Dynamical Systems – Theory and Applications, Eds. J. Awrejcewicz, M. Kazmierczak, P. Olejnik, J. Mrozowski.-2013.-Vol.1.-P.145-152.

52. Glushkov A.V., Kuzakon V.M., Ternovsky V.B., Buyadzhi V.V., Dynamics of laser systems with absorbing cell and backward-wave tubes with elements of a chaos // Dynamical Systems – Theory and Applications, Eds. J. Awrejcewicz, M. Kazmierczak, P. Olejnik, J. Mrozowski.-2013.-Vol.T1.-P.461-466.

53. Bunyakova Yu.Ya., Khetselius O.Yu., Non-linear prediction statistical method in forecast of atmospheric pollutants // Proc. of 8th International Carbon Dioxide Conference.-2009.-P.T2-098.

54. Glushkov A.V., Khetselius O., Svinarenko A.A., Lovett L., Energy approach to nucleli and atoms in a strong laser field: Stark effect and multiphoton resonances // Quantum Theory: Reconsideration of Foundations. AIP Conf. Proceedings.-2010.-Vol.1232.-P.259-266.

55. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Loboda A.V., Svinarenko A.A., QED approach to atoms in a laser field: Multiphoton resonances and above threshold ionization // Frontiers in Quantum Systems in Chemistry and Physics, Ser.: Progress in Theoretical Chemistry and Physics; Eds. S.Wilson, P.J.Grout, J. Maruani, G. Delgado-Barrio, P. Piecuch (Springer), 2008.-Vol.18.-P.543-560.

56. Glushkov A.V., Khetselius O.Y., Malinovskaya S.V., New laser-electron nuclear effects in the nuclear γ transition spectra in atomic and molecular systems // Frontiers in Quantum Systems in Chemistry and Physics. Series: Progress in Theoretical Chemistry and Physics Eds. S.Wilson, P.J.Grout, J. Maruani, G. Delgado-Barrio, P. Piecuch (Springer).-2008.-Vol.18.-P.525-541.

57. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Svinarenko A.A., Prepelitsa G.P., Energy approach to atoms in a laser field and quantum dynamics with laser pulses of different shape // In: Coherence and Ultrashort Pulse Laser Emission, Ed. by Dr. F. Duarte (InTech).-2010.-P.159-186.

58. Glushkov A.V., Khetselius O., Svinarenko A., Relativistic theory of cooperative muon-γ gamma-nuclear processes: Negative muon capture and metastable nucleus discharge // Advances in the Theory of Quantum Systems in Chemistry and Physics. Ser.: Progress in Theor. Chemistry and Physics, Eds. P.Hoggan, E.Brandas, J.Maruani, G. Delgado-Barrio, P. Piecuch (Springer).-2012.-Vol.22.-P.51-68.

59. Glushkov A.V., Khetselius O., Svinarenko A, Relativistic Quantum Theory. Quantum mechanics of Atomic Systems.-Odessa: Astroprint, 2008. - 700P.

60. Glushkov A.V., Relativistic Quantum Theory. Quantum mechanics of Atomic Systems.-Odessa: Astroprint, 2008. - 700P.
chaotic dynamical systems and their parameters determination //Proc. of International Geometry Center*. -2013.- Vol.6, N1.-P.43-48.

62. Malinovskaya S.V., Glushkov A.V., Dubrovskaya Yu.V., Vitavetskaya L.A., Quantum calculation of cooperative muon-nuclear processes: discharge of metastable nuclei during negative muon capture// Recent Advances in the Theory of Chemical and Physical Systems (Springer).-2006.-Vol.15.-P.301-307.

63. Malinovskaya S., Glushkov A., Khetselius O., Lopatkin Yu., Loboda A.V., Svinarenko A., Nikola L., Perelygina T., Generalized energy approach to calculating electron collision cross-sections for multicharged ions in a plasma: Debye shielding model// Int. Journ. Quant. Chem.-2011.-Vol.111,N2.-P.288-296.

64. Malinovskaya S.V., Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Svinarenko A.A., Mischenko E.V., Florko T.A., Optimized perturbation theory scheme for calculating the interatomic potentials and hyperfine lines shift for heavy atoms in the buffer inert gas// Int. Journ. Quant. Chem.-2009.-Vol.109, N14.-P.3325-3329.

65. Glushkov A.V., Relativistic and correlation effects in spectra of atomic systems.-Odessa: Astroprint.-2006.-400P.

66. Glushkov A.V., Khetselius O.Y., Malinovskaya S.V., Spectroscopy of cooperative laser-electron nuclear effects in multiatomic molecules// Molec. Physics. (UK).-2008.-Vol.106, N9-10.-P.1257-1260.

67. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Svinarenko A.A., Prepelitsa G.P., Mischenko E.V., The Green’s functions and density functional approach to vibrational structure in the photoelectron spectra for molecules// AIP Conf. Proc.-2010.-Vol.1290.-P.263-268.

68. Glushkov A.V, Malinovskaya S.,Co-operative laser nuclear processes: border lines effects// In: New projects and new lines of research in nuclear physics. Eds. G.Fazio and F.Hanappe, Singapore : World Scientific.-2003.-P.242-250.

69. Glushkov A V, Ivanov L N, DC Strong Field Stark Effect for Non-hydrogenic Atoms: Consistent Quantum Mechanical Approach // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Phys.-1993.-Vol.26,N14.-P.L379 – L386.

70. Glushkov A.V., Lovett L., Khetselius O.Yu., Gurnitskaya E.P., Dubrovskaya Yu.V., Loboda A.V., Generalized multiconfiguration model of decay of multipole giant resonances applied to analysis of reaction ($\mu$-n) on the nucleus $^{40}$Ca// Internat. Journ. Modern Physics A.-2009.-Vol. 24, N2-3.-P.611-615.

71. Glushkov A.V., Malinovskaya S.V., Sukharev D.E., Khetselius O.Yu., Loboda A.V., Lovett L., Green’s function method in quantum chemistry: New numerical algorithm for the Dirac equation with complex energy and Fermi-model nuclear potential//Int. Journ. Quant. Chem.-2009.-Vol.109.-P.1717-1727.

72. Glushkov A.V., Kondratenko P.A., Lepikh Ya., Fedchuk A.P., Svinarenko A.A., Lovett L., Electrodynamical and quantum - chemical approaches to modelling the electrochemical and catalytic processes on metals, metal alloys and semiconductors// Int. Journ. Quant. Chem.-2009.-Vol.109,N14.-P.3473-3481.

73. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Gurnitskaya E.P., Loboda A.V., Florko T.A., Sukharev D.E., Lovett L., Gauge-Invariant QED Perturbation Theory Approach to Calculating Nuclear Electric Quadrupole Moments, Hyperfine Structure Constants for Heavy Atoms and Ions//Frontiers in Quantum Systems in Chemistry and Physics (Springer), 2008.-Vol.18.-P.507-524.

74. Khetselius O Yu, Relativistic calculation of the hyperfine structure parameters for heavy elements and laser detection of the heavy isotopes// Phys. Scripta.-2009.-Vol.T135.-P.014023.

75. Khetselius O.Yu., Relativistic energy
approach to cooperative electron-γ-nuclear processes: NEET Effect// Quantum Systems in Chemistry and Physics: Progress in Methods and Applications. Ser.: Progress in Theoretical Chemistry and Physics (Springer, Dordrecht).- 2012-Vol.26.-P.217-229.

76. Buyadzhi V V , Glushkov A V , Spectroscopy of atom and nucleus in a strong laser field: Stark effect and multiphoton resonances//Photoelectronics.-2014.- Issue 23.-P.38-43
77. Glushkov A.V., Rusov V.D., Ambrosov S.V., Loboda A., Resonance states of compound super-heavy nucleus and EPPP in heavy nucleus collisions//New projects and new lines of research in nuclear physics. Ed. G.Fazio, F.Hanappe, Singapore : World Scientific.-2003.- P.126-132.

UDC 539.182

I. N. Serga, O. Yu. Khetselius, L. A. Vitavetskaya, A. N. Bystryantseva

RELATIVISTIC THEORY OF SPECTRA OF PIONIC ATOMIC SYSTEM $^{208}\text{Pb}$ WITH ACCOUNT OF STRONG PION-NUCLEAR INTERACTION EFFECTS

Abstract. It is presented a consistent relativistic theory of spectra of the pionic atoms on the basis of the Klein-Gordon-Fock with a generalized radiation and strong pion-nuclear potentials. It is applied to calculation of the energy and spectral parameters for pionic atoms of the $^{208}\text{Pb}$ with accounting for the radiation (vacuum polarization), nuclear (finite size of a nucleus) and the strong pion-nuclear interaction corrections. The measured values of the Berkley, CERN and Virginia laboratories and alternative data based on other versions of the Klein-Gordon-Fock theories with taking into account for a finite size of the nucleus in the model uniformly charged sphere and the standard Uehling-Serber radiation correction and optical atomic theory are listed too. There are listed new data on shift and broadening of the 4f level in $^{208}\text{Pb}$ due to the strong pion-nuclear interaction.

Key words: strong interaction, pionic atom $^{208}\text{Pb}$, relativistic theory

УДК 539.182

И. Н. Серга, О. Ю. Хецелиус, Л. А. Витаквестка, А. Н. Быстрянцева

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ СПЕКТРОВ ПИОННЫХ АТОМНЫХ СИСТЕМ $^{208}\text{Pb}$ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ СИЛЬНОГО ПИОН-ЯДЕРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Резюме. Представлена последовательная релятивистская теория спектров пионных атомов на основе уравнения Клейна-Гордона-Фока с обобщенными радиационным и сильным пион-ядерным потенциалом. Выполнен расчет энергетических и спектральных параметров для пионного атома $^{208}\text{Pb}$, с учетом радиационных (поляризация вакуума), ядерных (конечный размер ядра) эффектов и поправки на сильное пион-нуклонное взаимодействие. Также для сравнения
представлені дані змірений в лабораторіях Berkeley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтернативних теорій Клейна-Гордона-Фока з урахуванням кінцевого розміру ядра в моделі рівномірно зарядженої сфери і стандартної Юлінг-Сербер поправки. Представлені нові дані змірений в лабораторіях Berkley, ЦЕРН і Вирджинія і теоретичні результати, отримані на основі альтерат