Оптимальный синтез в простейшей задаче быстродействия с линейным фазовым ограничением

А.В. Дмитрук, И.А. Самыловский

Аннотация. Рассматривается задача быстродействия для классической системы "двойной интегратор" при наличии произвольного линейного фазового ограничения. С помощью принципа максимума строится полный синтез оптимальных траекторий и проводится качественное исследование их множителей Лагранжа.

Ключевые слова: оптимальное быстродействие, фазовое ограничение, принцип максимума Дубовицкого–Милютина, скачок меры.

1 Постановка задачи

На отрезке \([0, T]\) рассмотрим следующую задачу быстродействия:

\[
\begin{cases}
\dot{x} = y, & x(0) = x_0, \quad x(T) = 0, \\
\dot{y} = u, & y(0) = y_0, \quad y(T) = 0, \\
T \rightarrow \min, & |u| \leq 1,
\end{cases}
\]

при наличии линейного фазового ограничения

\[ y \geq kx - b \quad (b > 0). \]

Здесь \(x\) есть положение объекта (материальной точки) на прямой, \(y\) — ее скорость, \(u\) — сила воздействия на точку (управляющий параметр), \(t \in [0, T]\). Требуется перевести объект из заданного состояния \((x_0, y_0)\) в состояние \((0, 0)\) за минимальное время при соблюдении линейного ограничения (3) на переменные состояния (т.н. фазовые переменные) \(x, y\). Априори предполагается, что \(u(t)\) — произвольная измеримая ограничённая функция, и следовательно, \(x(t), y(t)\) — липшицевы функции.

При отсутствии фазового ограничения задача (1)-(2) есть хорошо известная задача Фельдбаума, которая служила одним из первых тестовых примеров применения принципа максимума Понтрягина (см. [1]). Случай, когда ограничение (3) присутствует и \(k = 0\), рассмотрен, например, в книге [3]) как пример применения принципа максимума в форме Дубовицкого–Милютина. Случай общего ограничения (3) до сих пор не рассматривался.
Отметим, что и в случае, когда ограничения нет, и в случае, когда оно есть, но \( k = 0 \), решение может быть найдено и без применения принципа максимума. Действительно, здесь требуется найти минимальный отрезок времени, на котором липшицева функция \( y(t) \) с заданными граничными условиями, ограничением на производную \( |\dot{y}| \leq 1 \) и нижней границей на саму функцию \( y \geq -1 \) имеет заданный интеграл. В случае отсутствия этой нижней границы несложными соображениями приходим к выводу, что оптимальная функция кусочно-линейна с производной \( \pm 1 \) и не более чем одним изломом. Если найденная функция нарушает нижнюю границу, то на отрезке времени, где происходит это нарушение, надо положить \( y = -1 \), а длину отрезка подобрать так, чтобы функция \( y(t) \) имела заданный интеграл. Детальное изложение этого решения можно рекомендовать в качестве упражнения для студентов младших курсов.

В случае, когда ограничение присутствует и \( k \neq 0 \), решение вряд ли может быть найдено описанным способом, ибо здесь нижняя граница для функции \( y(t) \) в каждой точке \( t \) зависит от ее интеграла на отрезке \([0, t]\). Поэтому мы здесь будем применять принцип максимума для задач с фазовыми ограничениями, полученный А.Я. Дубовицким и А.А. Милютиным (см. также [3, 4, 5]).

2 Формулировка принципа максимума

Пусть процесс \( x^0(t), y^0(t), u^0(t), t \in [0, T] \) доставляет минимум в задаче \((\mathbf{1})\)–(\(\mathbf{3}\)). Будем сначала считать, что его начальная точка \((x_0, y_0)\) не лежит на фазовой границе, т.е. \( y_0 > kx_0 - b \). Тогда согласно [2, 4] найдутся непрерывные слева функции ограниченной вариации \( \varphi(t), \psi(t) \) (сопряженные переменные), не равные одновременно нулю, неубывающая функция \( \mu \) с условием \( \mu(0) = 0 \), которые порождают функцию Понтрягина

\[
H = \varphi y + \psi u
\]

и расширенную функцию Понтрягина

\[
\overline{H} = \varphi y + \psi u + \dot{\mu} (y - kx + b),
\]

так что при этом выполняются сопряженные уравнения

\[
\begin{cases}
\varphi = -\overline{H}_x = k\dot{\mu}, \\
\dot{\psi} = -\overline{H}_y = -\varphi - \dot{\mu},
\end{cases}
\]

условие дополняющей нежесткости

\[
\dot{\mu}(t) (y^0(t) - kx^0(t) + b) = 0,
\]

закон сохранения энергии

\[
H(x^0(t), y^0(t), u^0(t)) \equiv \text{const} \geq 0,
\]

2
и условие максимума:

$$\max_{|u|\leq 1} H(x^0(t), y^0(t), u) = H(x^0(t), u^0(t)).$$

Последнее означает, что

$$u^0 \in \text{Sign}\psi = \begin{cases} +1, & \text{если } \psi > 0, \\ -1, & \text{если } \psi < 0, \\ [-1, +1], & \text{если } \psi = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь везде $\dot{\mu}(t)$ есть производная в смысле обобщенных функций. Другими словами, сопряженные уравнения следует понимать как равенства мер, т.е.,

$$d\varphi = k \, d\mu, \quad d\psi = -\varphi \, dt - d\mu,$$

или в интегральном смысле:

$$\varphi(t) = \int_0^t k \, d\mu(s) \, ds, \quad \psi(t) = -\int_0^t \varphi(s) \, ds - \mu(s), \quad t \in [0, T].$$

Условия трансверсальности мы не пишем, так как концы траектории фиксированы. Условие нетривиальности состоит в том, что пара $(\varphi, \psi) \neq (0, 0)$. В дальнейшем верхний индекс 0 у оптимального процесса указывать не будем.

Прежде, чем применять принцип максимума, определим то множество начальных точек, из которых исходит хотя бы одна допустимая траектория. Оно зависит от знака коэффициента $k$.

### 3 Случай $k > 0$: описание допустимого множества

Обозначим через $\Gamma$ прямую $y = kx - b$ (границу допустимой фазовой области), через $S$ – линию переключения в задаче без фазового ограничения (она есть объединение двух полупарабол: $x = -\frac{1}{2}y^2$, $y \geq 0$ и $x = \frac{1}{2}y^2$, $y \leq 0$).

Введем характерные точки для случая $k > 0$ (см. рис. 1):

1) точка $A$ есть пересечение $\Gamma$ с кривой $S$,
2) точка $E$ есть пересечение $\Gamma$ с осью абсцисс,
3) $C$ есть точка касания $\Gamma$ некоторой параболы семейства $x = -\frac{1}{2}y^2 + \text{const}$ (ясно, что эта парабола единственна),
4) точка $B$ есть пересечение параболы из предыдущего пункта с кривой $S$.

Нетрудно найти координаты этих точек. Точка $A$ задается соотношениями $x = \frac{1}{2}y^2$, $y = kx - b$, откуда

$$x = \frac{(bk + 1) - \sqrt{2bk + 1}}{k^2}, \quad y = \frac{1 - \sqrt{2bk + 1}}{k}.$$
Рис. 1: Траектория $C'CBO$ соответствует управлению $u = -1, 1$, траектория $ABO$ – управлению $u \equiv 1$

Точка $E = (b/k, 0)$. Точка $C$ общая для параболы $x = -\frac{1}{2}y^2 + m$ и прямой $y = kx - b$, в которой касательная к этой параболе совпадает с данной прямой, т.е. $dx/dy = -y = -1/k$. Отсюда

\[
y = -\frac{1}{k}, \quad x = \frac{(kb - 1)}{k^2}, \quad m = \frac{2kb - 1}{2k^2}.
\]

Точка $B$ задается соотношениями $x = -\frac{1}{2}y^2 + m, \quad x = \frac{1}{2}y^2$, откуда $x = m/2, \quad y = \sqrt{m}$. Впрочем, для качественного исследования эти координаты нам не понадобятся. Важно будет лишь взаимное расположение точек $A$ и $C$. В зависимости от этого возможны три случая, см. рис. 1, 2, 3.

Рассмотрим сначала те свойства допустимых траекторий, которые справедливы во всех этих трех случаях.

Пусть $x(t), y(t), u(t), t \in [0, T]$ есть некоторый допустимый процесс. Для удобства обозначим через $r(t) = (x(t), y(t))$ фазовую точку на плоскости $xOy$. Будем говорить, что точка $r(t)$ лежит на фазовой границе $\Gamma$ выше (ниже) точки $C$, если $y(t) > y_C$ (соответственно, $y(t) < y_C$).
1) Точки на фазовой границе, лежащие ниже $C$, никогда не достигимы. В самом деле, здесь всегда $u \geq -1 > ky$, ибо $y < -1/k$, поэтому $(y - kx)^* = u - ky > 0$, т. е. мы приходим в такую точку из запрещенной области, что невозможно.

2) Пусть $C^*$ есть точка на прямой $\Gamma$, симметричная точке $C$ относительно $E$. Если мы попали на фазовую границу в точку $E_1$ и $r(E_1) > r(C^*)$, то дальше двигаться нельзя, ибо система (1) сносит нас в запрещенную область. Если мы попали на $\Gamma$ в точку $E_1 \in (E, C^*)$ то далее движение возможно только в лунке, образованной прямой $\Gamma$ и дугой параболы, исходящей из точки $E_1$ с управлением $u = +1$, и выбраться из этой лунки, не нарушая фазовое ограничение, нельзя. Поэтому все точки на фазовой границе выше $E$ недостижимы. Отсюда следует, что и все точки верхней полуплоскости, лежащие правее параболы $(E', E)$ и выше $\Gamma$, также недостижимы (ибо из них мы рано или поздно попадаем на фазовую границу выше точки $E$).

3) Допустим, что в некоторый момент $t'$ мы попали в точку $E$. Если дальше найдется сколь угодно близкий момент $t$, при котором $y(t) > 0$, то мы должны находиться правее параболы, исходящей из точки $E$ с $u = +1$, и тогда попадаем в уже запрещенную область, что невозможно. Следовательно, существует $\delta > 0$, такое что $y(t) \leq 0$ на $[t', t' + \delta]$. Учитывая фазовое ограничение $y \geq kx - b$ и применения нижеследующую лемму 1 для $\xi = x_E - x$, $\eta = -y$, получаем $x(t) = x_E$, $y(t) = 0$ на $[t', t' + \delta]$, т.е. мы стоим в точке $E$, движение из нее невозможно. Таким образом, в точку $E$ попадать нельзя.

Но тогда нельзя попадать и во всю верхнюю часть параболы $(E', E)$, ибо оттуда мы попадем либо в $E$, либо в уже запрещенную область правее этой параболы. Отсюда следует, что множество начальных позиций $D$, из которых существуют допустимые траектории, не замкнуто — оно состоит из полуплоскости $y \geq kx - b$ за вычетом замкнутого множества, ограниченного слева параболой $(E', E)$.

Лемма 1 Пусть $k > 0$, $\delta > 0$, и для липшицевых функций $\xi(t)$ и $\eta(t)$ п.в. на отрезке $[0, \delta]$ выполняются соотношения:

$$\dot{\xi}(t) = \eta(t), \quad \xi(0) = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad k \xi(t) \geq \eta(t) \geq 0.$$  

Тогда $\xi(t) \equiv \eta(t) \equiv 0$ на $[0, \delta]$.

Доказательство. Из условия следует, что $0 \leq \xi(t) = \int_0^t \eta(\tau) d\tau \leq \int_0^t k \xi(\tau) d\tau$, а тогда по лемме Гронуолла $\xi(t) \equiv 0$, а значит, и $\eta(t) \equiv 0$. ∎

4) Итак, на фазовую границу можно попадать только на полуотрезке $[C, E)$, и здесь $\dot{x} = y < 0$. В частности, двигаться по границе можно лишь влево—вниз, от точки $E$, не включая ее саму, до точки $C$. 

Если на некотором отрезке времени мы находимся на границе $\Gamma$, т.е. $y(t) = kx(t) - b$, то $y(t) = kx(t)$, т.е. $u = ky$, и в силу ограничения $|u| \leq 1$ это может продолжаться лишь пока $|y| \leq 1/k$. Предельное значение $y = -1/k$ соответствует как раз точке $C$.

5) Нетрудно видеть, что для любой начальной позиции из множества $D$ хотя бы одна допустимая траектория существует. Эти траектории состоят из движений по параболам под действием управлений $u = -1$ или $u = +1$, а также движения вдоль фазовой границы. Отсюда по теореме Филиппова следует, что для любой начальной позиции из $D$ существует и оптимальная траектория.

4 Анализ принципа максимума для случая $k > 0$

Пусть для некоторого процесса $x(t), y(t), u(t)$, $t \in [0, T]$ с начальной точкой $(x_0, y_0) \notin \Gamma$ выполнен принцип максимума. Перейдем к его анализу.

5) Если в момент $t'$ мы на $\Gamma$, то слева около нее не может быть $\psi > 0$, иначе там было $u = +1$, и мы пришли в данную точку из запрещенной области. Следовательно, $\psi(t' - 0) \leq 0$. Так как в силу сопряженного уравнения всегда $\Delta \psi(t') = -\Delta u(t') \leq 0$, то и $\psi(t' + 0) \leq 0$.

6) Если в момент $t'$ мы на $\Gamma$ и выше $C$, то $\psi(t' + 0) \geq 0$, ибо иначе справа от $t'$ будет $\psi < 0$, $u = -1$, и мы пробиваем границу. Следовательно, $\Delta \psi(t') \geq 0$.

С другой стороны, так как $\Delta \psi(t') = -\Delta u(t') \leq 0$, то $\Delta \psi(t') = 0$, скачка меры нет, и $\psi(t') = 0$. Таким образом, в этом случае $\psi$ и $\varphi$ непрерывны в $t'$, а скачок меры возможен только в точке $C$.

7) Пусть $M = \{ t \mid r(t) \in \Gamma \}$ есть множество точек выхода на фазовую границу. Если оно пусто, то решение хорошо известно — движение происходит по параболам из двух указанных выше семейств. Будем считать, что $M$ непусто. Положим $t_1 = \min M$, $t_2 = \max M$.

Лемма 2 $M$ связно, т.е. это есть отрезок или точка: $M = [t_1, t_2]$.

Доказательство. Допустим, что $M$ не связано, т.е. существуют точки $t' < t''$ из $M$, такие что на интервале $\omega = (t', t'')$ мы вне $\Gamma$. Тогда $\mu = 0$ на $\omega$, значит $\varphi = \text{const}$, а $\psi$ — линейная функция. Согласно п.5, $\psi(t' - 0) \leq 0$ и $\psi(t'' + 0) \leq 0$. Если $\psi < 0$ на $\omega$, то $u = -1$ и мы не вернемся на $\Gamma$ в момент $t''$. Поэтому на $\omega$ имеем $\psi = 0$.

Отсюда следует, что на любом интервале $\omega' \subset [t_1, t_2]$, где мы вне $\Gamma$, имеем $\psi = 0$ (ибо он содержится в некотором максимальном интервале $\omega$ рассмотренного типа), а тогда в силу системы и $\varphi = 0$. Таким образом, если на некотором интервале из $[t_1, t_2]$ выполнено $\psi < 0$, то на этом интервале мы на $\Gamma$. 

6
Мы утверждаем, что $\psi = 0$ на всем полуотрезке $[t_1, t_2)$. Действительно, пусть $\psi(t_*) < 0$ в некоторой точке непрерывности $t_* \in (t_1, t_2)$. Тогда в окрестности этой точки $\psi < 0$, и значит мы на $\Gamma$, при этом $u = -1$. Но с таким управлением держаться на $\Gamma$ невозможно. Следовательно, $\psi(t) = 0$ во всех точках своей непрерывности из $(t_1, t_2)$, а значит и всюду на $(t_1, t_2)$.

В точке $t_1$ имеем $\psi(t_1 - 0) \leq 0$ и $\psi(t_1 + 0) = 0$, а так как $\Delta \psi(t_1) \leq 0$, то $\psi(t_1 - 0) = 0$, значит $\psi$ непрерывна в $t_1$, и $\psi(t_1) = 0$. Левее этой точки $\dot{\mu} = 0$, поэтому там по-прежнему $\psi = 0$, так что $\psi = 0$ на полуотрезке $[0, t_2)$.

Тогда на этом полуотрезке $\dot{\psi} = -(\varphi + \dot{\mu}) = 0$, откуда $\varphi = -\dot{\mu}$, и в силу сопряженного уравнения $\dot{\varphi} = -k\varphi$, т.е. $\varphi$ есть экспонента. Поскольку у нас $\varphi = 0$ на интервале $\omega$, то $\varphi = 0$ и на всем полуотрезке $[0, t_2)$.

Посмотрим теперь, что будет правее $t_2$. Если $\Delta \mu(t_2) = 0$, то $\psi = \varphi = 0$ и правее $t_2$, т.е. на всем отрезке $[0, T]$, а это тривиальный набор. Значит $\Delta \mu(t_2) > 0$, тогда $\Delta \varphi(t_2) > 0$, $\Delta \psi(t_2) < 0$, и дальше имеем $\dot{\psi} = -\varphi < 0$, поэтому дальше всюду $\psi < 0$, $u = -1$, и мы не попадаем в 0.

Из этих рассуждений следует, что интервала $\omega = (t', t'')$ с указанными свойствами быть не может, и значит $M = [t_1, t_2]$. Лемма доказана.

8) Если $t_1 < t_2$, т.е. $M$ есть отрезок, то на $(t_1, t_2)$ согласно п. 4 $u = ky < 0$, т.е. мы движемся влево-вниз, значит $|y| < 1/k$, поэтому $|u| < 1$, и в силу (9) $\psi = 0$. Тогда $\dot{\psi} = -(\varphi + \dot{\mu}) = 0$, откуда $\varphi = -\dot{\mu}$, и $\dot{\varphi} = -k\varphi$, поэтому $\varphi$ есть экспонента на $(t_1, t_2)$.

Может ли быть $\dot{\mu} = 0$ на $(t_1, t_2)$? В этом случае, повторяя рассуждения п. 7, получаем $\psi = \varphi = 0$ на полуотрезке $[0, t_2)$. Далее, случай $\Delta \mu(t_2) = 0$ приводит к тривиальному набору, а в случае $\Delta \mu(t_2) > 0$ мы не попадаем в 0.

Таким образом, если $t_1 < t_2$, то плотность меры $\dot{\mu} > 0$ на $(t_1, t_2)$, и это есть экспонента.

Рассмотрим теперь все возможные случаи расположения множества $M$.

9) Может ли быть $M = \{t_*\}$ (касание границы в одной точке) при $r(t_*) > C$? Поскольку здесь скачка нет, то $\dot{\mu} \equiv 0$, поэтому движение такое же, как и без фазового ограничения, т.е. по параболам. Но так как в окрестности точки $r(t_*)$ будет $u = -1$, то при выходе из этой точки мы пробьем границу. Таким образом, этот случай невозможен.

Дальнейшее рассмотрение зависит от взаимного расположения точек $A$ и $C$.

### 4.1 Случай $k > 0$ и $C \geq A$.

10) Может ли быть $M = [t_1, t_2]$ при $t_1 < t_2$ и $r(t_2) > C$? В этом случае скачков меры нет нигде, и на $M$ согласно п. 8 имеем $|u| < 1$, тогда $\psi = 0$, а $\dot{\mu} = -\varphi$ есть положительная экспонента.
Далее будет \( \varphi = \text{const} < 0 \), тогда \( \dot{\psi} = -\varphi > 0 \), поэтому правее \( M \) всё время \( \psi > 0 \), \( u = 1 \) без переключения, и тогда попасть в ноль можно только при \( r(t_2) = A \), что возможно только если \( C < A \).

Итак, при \( C \geq A \) выхода на фазовую границу с \( r(t_2) > C \) быть не может, возможно лишь \( r(t_2) = C \).

11) Рассмотрим случай, когда \( M = \{ t_* \} \) и \( r(t_*) = C \). Тогда до и после \( t_* \), функция \( \psi \) линейная (вообще говоря, с разными коэффициентами). Отбросим сначала некоторые заведомо невозможные случаи. Если \( \psi > 0 \) слева около \( t_* \), то мы пришли в точку \( C \) по параболе с управлением \( u = 1 \), а значит, из запрещенной зоны, противоречие.

Если \( \psi = 0 \) всюду слева \( t_* \), то там и \( \varphi = 0 \). Если при этом \( \Delta \mu(t_*) > 0 \), то далее \( \varphi = \text{const} > 0 \), тогда \( \Delta \psi(t_*) = -\Delta \mu(t_*) < 0 \), и далее \( \dot{\psi} = -\varphi < 0 \), т.е. \( \psi < 0 \) и убывает, и тогда \( u = -1 \) без переключения. Но с таким управлением прийти из точки \( C \) в 0 невозможно. Следовательно, \( \Delta \mu(t_*) = 0 \), а тогда правее \( t_* \) получаем \( \varphi = 0 \), \( \psi = 0 \) – тривиальный набор множителей.

Таким образом, слева около \( t_* \) должно быть \( \psi < 0 \). Если при этом \( \psi \) невозрастает слева от \( t_* \), то \( \psi(t_* - 0) < 0 \), и с учетом возможного скачка функции \( \Delta \psi(t_*) \leq 0 \) и ее производной \( \Delta \dot{\psi}(t_*) = -\Delta \varphi(t_*) = -k \Delta \mu(t_*) \leq 0 \) получаем, что всюду правее \( t_* \) тем более \( \psi < 0 \), и тогда описать \( u = -1 \), что невозможно. Значит, остается лишь случай, когда \( \psi \) слева от \( t_* \) отрицательна и возрастает до некоторого значения \( \psi(t_* - 0) \leq 0 \).

Если \( \Delta \mu(t_*) = 0 \), то мера не работает, \( \psi \) и далее линейно возрастает, либо меняя знак с минуса на плюс в точке \( B \) (см. рис 1), либо \( \psi > 0 \) всюду справа от \( t_* \). Тогда справа от \( t_* \) будет либо \( u = -1 \), 1, либо \( u = 1 \) без переключений. Первый вариант возможен лишь при \( C > A \), второй при \( C = A = B \). Такая траектория является оптимальной в задаче со свободной фазой, она лишь случайно коснулась фазовой границы, которая на нее никак не повлияла.

Если же \( \Delta \mu(t_*) > 0 \), то \( \psi(t_* + 0) < 0 \), и тогда для попадания в 0 надо, чтобы \( \psi \) сменила знак с минуса на плюс в точке \( B < C \).

Итак, если \( A = B = C \), то всюду правее \( t_C \) будет \( \psi > 0 \), \( u = 1 \) без переключения и без скачка.

Если же \( C > A \) (и значит, также \( C > B \)), то участок \( \psi < 0 \) обязательно присутствует, а в точке \( C \) может быть и скачок меры. Определим возможную величину этого скачка. Пусть \( t_C, t_B \) – соответствующие моменты времени. (Отмечим, что \( t_C = t_* \)). Обозначим \( \Delta \mu(t_*) = \delta \), \( \Delta t = t_B - t_C \). Величина \( \Delta t \) задана положением точек \( B \) и \( C \), тогда как \( \delta \) пока неизвестна. Примем для наших множителей нормировку \( -\varphi(T) = 1 \). Тогда на \( [t_C, T] \) имеем \( \dot{\psi} = -\varphi = 1 \), поэтому \( \psi(t_B) - \psi(t_C + 0) = \Delta t \), откуда с учетом условия \( \psi(t_B) = 0 \) получаем \( \psi(t_C + 0) = -\Delta t \), и нам надо лишь обеспечить неравенство \( \psi(t_C - 0) \leq 0 \). Так как \( \psi(t_C + 0) - \psi(t_C - 0) = -\delta \), то \( \psi(t_C - 0) = -\Delta t + \delta \), поэтому возможная величина
скачка определяется лишь неравенством $0 \leq \delta \leq \Delta t$, а в этих пределах скачок меры в точке $C$ может быть любым\footnote{В качестве проверки отметим, что при любом скачке меры $\Delta H(t_*) = \Delta \varphi \cdot y(t_*) + |\Delta \psi| = k \delta \left( -\frac{1}{k} \right) + \delta = 0$, так что условие $H = \text{const}$ сохраняется независимо от величины скачка.}

Таким образом, случай когда $M = \{t_*\}$ и $r(t_*) = C$, полностью разобран.

12) Наконец, пусть $M = [t_1, t_2]$, $t_1 < t_2$ и $r(t_2) = C$ (см. рис. 2) Тогда на $M$ мы движемся по границе влево-вниз, значит $r(t_1) > C$, поэтому скачок в $t_1$ нет, $\psi$ непрерывна в этой точке и равна 0 на $[t_1, t_2)$, а $\varphi$, как было установлено раньше, есть экспонента на $[t_1, t_2)$.

Если слева от $t_1$ имеем $\psi = 0$, то и $\varphi = 0$, тогда $\varphi = 0$ и на $[t_1, t_2)$, а тогда там и $\dot{\mu} = -\dot{\psi} = 0$. Если далее $\Delta \mu(t_2) > 0$, то с этого момента $\varphi > 0$, $\psi < 0$, $u = -1$ до конца отрезка, и мы опять не попадаем в 0. Значит, $\Delta \mu(t_2) = 0$, тогда и дальше $\psi = \varphi = 0$, получаем тривиальный набор.

Случай $\psi > 0$ слева от $t_1$ исключается в силу п. 4. Остается случай, когда слева от $t_1$ функция $\psi < 0$ и возрастает до нуля, при этом $u = -1$, $\varphi = \text{const} < 0$. Для определенности можно считать $\varphi = -1$. Далее на $M$ имеем $\psi = 0$, поэтому $\dot{\varphi} = -k \varphi$, и значит $\varphi = -e^{-k(t-t_1)}$. Если в точке $t_2$ скачка нет, то дальше мера отключается, $\varphi = \text{const} < 0$, поэтому $\psi > 0$ и возрастает, $u = +1$. Учитывая, что
Отсюда следует, что если \( C > A \), то в точке \( t_2 \) должен быть скачок \( \Delta \mu(t_2) = \delta > 0 \). Тогда \( \Delta \varphi(t_2) = k\delta \), \( \Delta \psi(t_2) = -\delta \), поэтому справа от \( t_2 \) будет \( \varphi = -e^{-km + k\delta} \), где \( m = t_2 - t_1 \), и тогда в точке переключения \( B \) должно выполняться равенство \( \psi(t_B) = -\delta + (e^{-km} - k\delta) \Delta t = 0 \), откуда

\[
\delta = \frac{(e^{-km} \Delta t)}{(1 + k \Delta t)}.
\]

Для данной траектории величины \( \Delta t \) и \( m \) известны, поэтому величина скачка \( \delta \) определяется однозначно.

Таким образом, для случая \( k > 0 \), \( C \geq A \) мы рассмотрели все возможные случаи расположения множества \( M \), и для каждого случая нашли соответствующие сопряженные переменные и меру, сосредоточенную на множестве контактов траектории с фазовой границей. Отсюда вытекает, что оптимальный синтез здесь следующий.

**Случай** \( C > A \). В замкнутой области левее параболы \( (C', C] \) (включая саму эту параболу) и прямой \( \Gamma \) (включая точки этой прямой \( \leq C \)), оптимальные траектории те же, что и в задаче со свободными фазовыми переменными. В области, ограниченной параболами \( (C', C], (E', E] \) и прямой \( \Gamma \), оптимальные траектории с \( u = -1 \) приходят на отрезок \([C, E] \), далее идут вдоль \( \Gamma \) до точки \( C \), в которой мера делает скачок, после чего движение при \( u = -1 \) идет по дуге \([C, B] \), и затем с \( u = 1 \) по дуге \([B, O] \).

**Случай** \( C = A = B \). В области левее параболы \( (C', C] \) и прямой \( \Gamma \), оптимальные траектории те же, что и в свободной задаче. В области, ограниченной параболами \( (C', C], (E', E] \) (включая сами эти параболы) и прямой \( \Gamma \), оптимальные траектории приходят на полуотрезок \([C, E] \), далее идут вдоль \( \Gamma \) до точки \( C \), и затем с \( u = 1 \) по дуге \([C, O] \).

В обоих этих случаях для начальных точек, лежащих на полуотрезке \([C, E] \), оптимальные траектории являются "хвостами" оптимальных траекторий, исходящих из некоторых точек вне \( \Gamma \), первый участок движения по которым и состоит в попадании на этот полуотрезок с управлением \( u = -1 \).

4.2 **Случай** \( k > 0 \) и \( C < A \).

Рассуждения пунктов 1–9 здесь по-прежнему остаются в силе. Отличие от случая \( C \geq A \) состоит в том, что здесь двигаться по границе \( \Gamma \) ниже точки \( A \) не имеет смысла, так как в этой точке можно переключиться на \( u = +1 \) и наискорейшим образом прийти в 0 (см. рис 3). Пункт 10 как раз и относится к случаю, когда \( M = [t_1, t_2] \) при \( t_1 < t_2 \) и \( r(t_2) = A \). Это здесь единственный случай, когда мера ненулевая. Отсюда вытекает, что оптимальный синтез здесь следующий.
В области левее параболы $(A', A]$ и прямой $\Gamma$ (включая эту параболу и прямую) оптимальные траектории те же, что и в свободной задаче. В области между параболами $(A', A], \ (E', E]$ и выше прямой $\Gamma$ оптимальные траектории с $u = -1$ приходят на полуотрезок $[A, E)$, далее идут вдоль $\Gamma$ до точки $A$, и затем с $u = 1$ по дуге $[A, O]$. Для начальных точек, лежащих на полуотрезке $[A, E)$, оптимальные траектории являются "хвостами" оптимальных траекторий, исходящих из некоторых точек вне $\Gamma$, первый участок движения по которым и состоит в попадании на этот полуотрезок с управлением $u = -1$. Замкнутое множество, ограниченное параболой $(E', E]$ и прямой $\Gamma$, недопустимо.

5 Случай $k < 0$.

Положим $k = -q$, где $q > 0$. Прямая $\Gamma$ (гранича допустимой фазовой области) задается теперь равенством $y = -qx - b$, а кривая переключения $S$ та же, что и раньше. Здесь возможны три качественно различных случая в зависимости от числа точек, в которых прямая $\Gamma$ пересекает кривую $S$: в одной, двух или трех.

5.1 Случай $k < 0$ с тремя точками пересечения

Введем характерные точки для этого случая. Пусть $C$ есть точка касания $\Gamma$ и некоторой параболы семейства $x = \frac{1}{2} y^2 + \text{const}$ (ясно, что она единственна), $F$
есть пересечение $\Gamma$ с кривой $S$ выше точки $C$, а точка $H$ — пересечение $\Gamma$ с кривой $S$ ниже точки $C$ (см. Рис. 4).

Рис. 4:

Найдем координаты этих точек. Точка $A$ задается соотношениями $x = \frac{1}{2} y^2$, $y = -(qx + b)$, откуда

$$x = \frac{(1 - bq) - \sqrt{1 - 2bq}}{q^2}, \quad y = -1 + \frac{\sqrt{1 - 2bq}}{q}.$$  

Точка $C$ общая для параболы $x = \frac{1}{2} y^2 + m$ и прямой $y = -(qx + b)$, в которой касательная к этой параболе совпадает с данной прямой, т.е. $dx/dy = y = -1/q$. Отсюда

$$y = -\frac{1}{q}, \quad x = \frac{(1 - bq)}{q^2}.$$  

Точка $H$ никакой роли играть не будет.

Обозначим через $\Omega_1$ открытую область, ограниченную прямой $\Gamma$ и левой ветвью линии $S$; через $\Omega_2$ область, лежащую между левой ветвью линии $S$ и дугой параболы $[F, F']$; через $\Omega_3$ область, ограниченную прямой $\Gamma$ и параболами $[F, F']$ и $[C, C']$; через $\Omega_4$ область, ограниченную параболами $[C, C']$ и $[C, C'']$; и через $\Omega_5$ область, лежащую между прямой $\Gamma$ и параболой $[C, C'']$. Границные линии этих областей будем рассматривать как специальные случаи.

Прежде всего, отметим некоторые свойства допустимых траекторий управляемой системы (4) в нашем случае и определим множество начальных допустимых точек.
1) Точки на фазовой границе, лежащие ниже \( C \), недостижимы на траекториях нашей системы. Действительно, здесь всегда \( y < -\frac{1}{q} \), поэтому \( (y + qx)^* = u + qy < u - 1 \leq 0 \), т. е. допустимые скорости направлены внутрь запрещенной области, и значит дальнейшее движение из таких точек невозможно.

Нетрудно видеть, что и любые точки из области \( \Omega_5 \) также недопустимы, ибо любое движение из них приводит в точки фазовой границы, лежащие ниже \( C \), поэтому множество начальных допустимых точек \( D \) в нашей задаче состоит из полуплоскости, заданной фазовым ограничением, за вычетом открытой области \( \Omega_5 \). Таким образом, \( D \) — замкнутое множество. Мы, однако, будем сначала считать, что начальная точка \( (x(0), y(0)) \) лежит внутри \( D \), а случай граничных точек рассмотрим потом отдельно. Как и в предыдущем случае, по теореме Филиппова для любой начальной позиции из \( D \) существует и оптимальная траектория.

2) Заметим, что для начальных точек, лежащих в области \( \Omega_1 \) и \( \Omega_2 \), включая их границы, оптимальные траектории в свободной задаче, без фазового ограничения, всюду удовлетворяют этому ограничению, поэтому они будут оптимальными и в задаче с фазовым ограничением. Таким образом, остается рассмотреть только области \( \Omega_3 \) и \( \Omega_4 \).

3) Как уже было показано, на фазовую границу можно попадать только выше точки \( C \), и здесь \( \dot{x} = y < 0 \). В частности, двигаться по границе можно лишь влево—вверх, пока сохраняется условие \( y < 0 \). Нам, конечно, достаточно двигаться лишь до точки \( F \), ибо из нее мы уже оптимально попадаем в 0 при постоянном управлении \( u = +1 \).

Если на некотором отрезке времени мы находимся на \( \Gamma \), т. е. \( y(t) = -qx(t) - b \), то \( \dot{y}(t) = -q \dot{x}(t) \), т. е. \( u = -q y \), и в силу ограничения \( |u| \leq 1 \) это может быть лишь при \( y \geq -\frac{1}{q} \). Предельное значение \( y = -\frac{1}{q} \) соответствует точке \( C \). Таким образом, двигаться по границе можно лишь в пределах отрезка \( [C, F] \).

5.2 Анализ принципа максимума для случая \( k < 0 \) с тремя точками пересечения

Пусть \( (x(t), y(t), u(t)), t \in [0, T] \), есть некоторый оптимальный процесс, выходящий из точки \( (x(0), y(0)) \in \Omega_3 \cup \Omega_4 \), не лежащей на \( \Gamma \). Тогда для него выполнен принцип максимума [1]–[3]. Перейдем к его анализу.

4) Если в момент \( t' \) мы на \( \Gamma \), то справа около этого момента не может быть \( \psi < 0 \), иначе там будет \( u = -1 \), и мы пробиваем фазовую границу. Следовательно, \( \psi(t'+0) \geq 0 \). Так как в силу сопряженного уравнения всегда \( \Delta \psi(t') = -\Delta u(t') \leq 0 \), то и \( \psi(t' - 0) \geq 0 \).

5) Если в момент \( t' \) мы на \( \Gamma \) и выше \( C \), то слева около этого момента не может быть \( \psi > 0 \), ибо иначе там будет \( u = +1 \), и мы пришли в данную точку из запрещенной области. Следовательно, \( \psi(t' - 0) \leq 0 \). Тогда с учетом предыдущего
Лемма 3 М связно, т.е. это есть отрезок или точка: $M = [t_1, t_2]$. 

Доказательство. Допустим, что $M$ не связно, т.е. существуют точки $t' < t''$ из $M$, такие что на интервале $\omega = (t', t'')$ мы вне $\Gamma$. Тогда $\mu = 0$ на $\omega$, значит $\varphi = \text{const}$, а $\psi$ — линейная функция. Согласно п.4, $\psi(t' + 0) \geq 0$ и $\psi(t'' + 0) \geq 0$. Если $\psi > 0$ на $\omega$, то $u = +1$ и мы не вернемся на $\Gamma$ в момент $t''$. Поэтому $\psi = 0$ на $\omega$.

Таким образом, на любом интервале $\omega \subset [t_1, t_2]$, где мы вне $\Gamma$, имеем $\psi = 0$ (а тогда в силу системы и $\varphi = 0$). Отсюда следует, что если на некотором интервале из $[t_1, t_2]$ выполнено $\psi > 0$, то на этом интервале мы на $\Gamma$.

Мы утверждаем, что $\psi = 0$ на всем полуинтервале $(t_1, t_2]$. Действительно, пусть $\psi(t_1) > 0$ в некоторой точке своей непрерывности $t_1 \in (t_1, t_2)$. Тогда в окрестности этой точки $\psi > 0$, и значит мы на $\Gamma$, при этом $u = +1$. Но с таким управлением держаться на $\Gamma$ невозможно. Следовательно, $\psi(t) = 0$ во всех точках своей непрерывности из $(t_1, t_2)$, а значит и всюду на этом интервале.

В точке $t_2$ имеем $\psi(t_2 - 0) = 0$, и $\psi(t_2 + 0) \geq 0$ а так как $\Delta\psi(t_2) \leq 0$, то $\psi(t_2 + 0) = 0$, значит $\psi$ непрерывна в $t_2$, и $\psi(t_2) = 0$. Правее этой точки $\mu = 0$, поэтому там по-прежнему $\psi = 0$, так что $\psi = 0$ на полуинтервале $(t_1, T]$.

Тогда на этом полуинтервале $\dot{\psi} = -(\varphi + \mu) = 0$, откуда $\varphi = -\mu \leq 0$ и $\varphi = q\varphi$, т.е. $\varphi$ есть экспонента. Последовательно, $\varphi = 0$ на $\omega$, то $\varphi = 0$ и на всем полуинтервале $(t_1, T]$.

Посмотрим, что происходит левее $t_1$. Если $\Delta\mu(t_1) = 0$, то $\psi = \varphi = 0$ и левее $t_1$, т.е. на всем отрезке $[0, T]$, а это тривиальный набор. Значит $\Delta\mu(t_1) > 0$, тогда $\Delta\varphi(t_1) < 0$, $\Delta\psi(t_1) < 0$, и на участке $[0, t_1]$ имеем $\varphi = \text{const} > 0$, $\psi = -\varphi < 0$, так что $\psi > 0$ и убывает до значения $\psi(t_1 - 0) > 0$, при этом $u = +1$, и значит, начальная точка лежит на параболе $[C, C'']$ правее точки $C$, что мы исключили пока из рассмотрения.

Из этих рассуждений следует, что интервала $\omega = (t', t'')$ с указанными свойствами быть не может, и значит $M = [t_1, t_2]$. Лемма доказана. □

7) Если $t_1 < t_2$, то на $(t_1, t_2)$ согласно п. 4 $u = -qy > 0$, т.е. мы движемся влево-вверх, значит $|y| < 1/q$, поэтому $|u| < 1$, и в силу $\psi = 0$. Тогда $\dot{\psi} = -(\varphi + \mu) = 0$, поэтому $\varphi = -\mu$, и $\varphi = q\varphi$, т.е. $\varphi = -\mu$ есть экспонента на $(t_1, t_2)$. 

\[\Delta\psi(t') \geq 0, \text{ и значит } \Delta\psi(t') = 0, \text{ скачка меры нет, и } \psi(t') = 0. \text{ Таким образом, в этом случае } \psi \text{ и } \varphi \text{ непрерывны в } t', \text{ а скачок меры возможен только в точке } C.\]
Может ли быть \( \dot{\mu} = 0 \) на \((t_1, t_2)\)? В этом случае, повторяя рассуждения п. 6, получаем \( \psi = \varphi = 0 \) на полунтервале \((t_1, T]\). Далее, случай \( \Delta \mu(t_1) = 0 \) приводит к тривиальному набору, а в случае \( \Delta \mu(t_1) > 0 \) начальная точка лежит на параболе \([C, C''\rangle\), исключенной из рассмотрения.

Таким образом, если \( t_1 < t_2 \), то \( \dot{\mu} > 0 \) на \((t_1, t_2)\) и это есть экспонента.

Рассмотрим теперь все возможные случаи расположения множества \( M \).

8) Может ли быть \( M = \{t_\ast\} \) (касание границы в одной точке) при \( r(t_\ast) < F \)? Если к тому же \( r(t_\ast) > C \), то как мы знаем, скачка меры здесь нет, \( \dot{\mu} \equiv 0 \), поэтому движение такое же, как и без фазового ограничения, т.е. по параболам. Так как \( r(t_\ast) < F \), то в окрестности этой точки \( u = -1 \), и при выходе из неё мы пробиваем границу. Следовательно, в точке \( r(t_\ast) \) должен быть скачок меры, а это возможно только при \( r(t_\ast) = C \).

В этом случае, так как слева и справа от \( t_\ast \) мера не работает, функция \( \psi \) линейная (с разными коэффициентами), и поскольку \( \psi(t_\ast + 0) \geq 0 \), справа от \( t_\ast \) либо всюду \( \psi > 0 \) и тогда \( u = +1 \), либо \( \psi \) меняет знак с плюса на минус и тогда \( u = +1, -1 \). (Случай, когда \( \psi < 0 \) справа около \( t_\ast \) исключается, ибо тогда мы пробиваем границу.) В обоих этих случаях, как легко видеть, мы можем попасть в 0, так что они тоже исключаются.

Итак, множество \( M \) может состоять из одной точки лишь в случае, когда эта точка есть \( F \), и согласно п. 5, скачка меры здесь нет. Тогда мы имеем траекторию свободной задачи, которая лишь случайно коснулась фазовой границы.

9) Может ли быть \( M = [t_1, t_2] \) при \( t_1 < t_2 \) и \( r(t_1) > C \)? В этом случае скачков меры нет нигде, и на \( M \) согласно п. 9 имеем \( |u| < 1 \), \( \psi = 0 \), \( \dot{\mu} = -\varphi \) есть положительная экспонента. Правее \( t_2 \) имеем \( \varphi = \text{const} < 0 \), тогда \( \dot{\psi} = -\varphi > 0 \), поэтому всё время \( \psi > 0 \), \( u = 1 \) без переключения, и тогда попасть в ноль можно только при \( r(t_2) = F \). Таким образом, отрезок выхода на фазовую границу всегда кончается в точке \( F \).

На начальном отрезке \([0, t_1]\) также имеем \( \varphi = \text{const} < 0 \) и \( \dot{\psi} = -\varphi > 0 \), поэтому \( \psi < 0 \) и растет до значения \( \psi(t_1) = 0 \), при этом \( u = -1 \). Такие траектории соответствуют начальным значениям из области \( \Omega_3 \).

10) Наконец, пусть \( M = [t_1, t_2] \), где \( t_1 < t_2 \), \( r(t_1) = C \) и \( r(t_2) = F \). Тогда на \( M \), как и прежде, \( \psi = 0 \), \( \dot{\mu} = -\varphi \) есть положительная экспонента, и далее \( \psi > 0 \), \( u = +1 \) без переключения.

Если \( \Delta \mu(t_1) = 0 \), то слева от \( t_1 \) имеем \( \varphi = \text{const} < 0 \) и, как и выше, \( \dot{\psi} = -\varphi > 0 \), так что \( \psi < 0 \) и растет до значения \( \psi(t_1) = 0 \), при этом \( u = -1 \). Это соответствует траекториям, начинаящимся на параболе \([C, C''\rangle\), разделяющей области \( \Omega_3 \) и \( \Omega_4 \).

Если же \( \Delta \mu(t_1) > 0 \), то \( \Delta \psi(t_1) < 0 \), и значит \( \psi(t_1 - 0) > 0 \). При этом либо \( \psi > 0 \) всюду левее \( t_1 \), либо \( \psi \) меняет знак с минуса на плюс. Первый случай соответствует траекториям, начинаящимся правее точки \( C \) на параболе \([C, C''\rangle\),
ограничивающей снизу область $\Omega_4$, а второй — траекториям, начинающимся в
самой этой области и с управлением $u = -1$ приходящим на параболу $[C, C'']$.
В этом втором случае величина скачка меры в точке $t_1$ при любой нормировке
пары функций $(\varphi, \psi)$ однозначно определяется временем движения из начальной
точки до параболы $[C, C'']$.

11) Как мы обещали, рассмотрим отдельно случай "граничных" траекторий,
начинающихся на параболе $[C, C'']$ правые точки $C$, идущих с управлением $u =
+1$ вдоль этой параболы до точки $C$, затем по прямой $\Gamma$ до точки $E$, и далее с
управлением $u = +1$ по кривой $S$ до нуля.

Если для такой траектории $\Delta \mu(t_1) = 0$, то как мы видели, $\psi \equiv \varphi \equiv 0$, про-
тиворечие. Поэтому $\Delta \mu(t_1) > 0$, и можно принять нормировку $\Delta \mu(t_1) = 1$. То-
гда $\Delta \psi(t_1) = -1$, и значит $\psi(t_1 - 0) = 1$ (поскольку $\psi = 0$ на $M$). При этом
$\Delta \varphi(t_1) = -q$, и так как на $M$ у нас $\varphi = -\mu \leq 0$, то $\varphi(t_1 + 0) = \varphi(t_1 - 0) - q \leq 0$,
откуда $\varphi_1 := \varphi(t_1 - 0) \leq q$. Итак, левее $t_1$ имеем $\varphi \equiv \varphi_1 \leq q$, и при этом
$\psi(0) = 1 + \varphi_1 t_1$. Поскольку на начальном участке нашей траектории $u = +1$, то
на этом участке не может быть $\psi < 0$, поэтому $\psi(0) = 1 + \varphi_1 t_1 \geq 0$. Правее $t_2$,
как и прежде, мера отключается, $\psi > 0$ и $u = +1$. Таким образом, значение $\varphi_1$
определяется неоднозначно: оно лишь ограничено неравенствами $-1/t_1 \leq \varphi_1 \leq q$.
В предельном случае $\varphi_1 = q$ получаем $\psi = 1 + q(t_1 - t)$ левее $t_1$ , и затем $\varphi = \psi = 0$
на всем участке $(t_1, T]$. Это как раз тот вырожденный случай, который был описа-
н в доказательстве леммы.

Таким образом, случай $k < 0$ с тремя точками пересечения полностью рассмотрен. Оптимальный синтез здесь таков. Из точек множества $\Omega_1$ траектория идет с управлением $u = +1$ до левой ветви кривой $S$, и затем с управлением
$u = -1$ до начала координат. Из множества $\Omega_2$ траектория идет с управлением
$u = -1$ до правой ветви кривой $S$, и затем с управлением $u = +1$ до начала координат.
Из множества $\Omega_3$ движемся с управлением $u = -1$ до отрезка $[F, C]$ фазовой границы, затем влево — вверх вдоль этого отрезка до точки $F$, после чего с управлением
$u = +1$ приходим в начало координат. Наконец, Из множества $\Omega_4$ движемся с управлением $u = -1$ до параболы $[C, C'']$, затем вдоль этой параболы с управлением
$u = +1$ до точки $C$, далее вдоль отрезка $[C, F]$ фазовой границы, в точке $F$ переключаемся на $u = +1$ и приходим в начало координат.

5.3 Случай $k < 0$ с двумя точками пересечения
Введем характерные точки для этого случая. Пусть $C$ есть точка касания $\Gamma$ и
верхней ветви линии переключения $S$ (ясно, что она единственна) (см. Рис.5).

Обозначим через $W_1$ открытую область, ограниченную прямой $\Gamma$ и левой ветвью
линии $S$; через $W_2$ область, лежащую правее и выше линии $S$ и левее пара-
Рис. 5:

болы $[C, C']$; через $W_3$ область, лежащую правее параболы $[C, C']$ и параболы $[C, C'']$; и через $W_4$ область, лежащую между прямой $\Gamma$ и параболой $[C, C'']$.

Этот случай есть предел предыдущего случая с тремя точками пересечения, когда граничный отрезок $[C, E]$ сужается до одной точки $C$. Здесь множество $\overline{W_1}$ есть предел множества $\overline{\Omega_1}$ (в некотором естественном смысле, который мы здесь не формализуем), множество $\overline{W_2}$ — предел множества $\overline{\Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4}$, а множество $\overline{W_3}$ — предел множества $\overline{\Omega_5}$.

Как и прежде, здесь справедливы следующие свойства допустимых траекторий.

1) Точки на фазовой границе, лежащие ниже $C$, недоступны на траекториях нашей системы. Любые точки из области $W_4$ также недопустимы, ибо любое движение из них приводит к точке фазовой границы, лежащей ниже $C$. Таким образом, множество начальных допустимых точек $D$ в нашей задаче замкнуто, оно состоит из полуплоскости $y \geq kx - b$ за вычетом области $W_4$.

2) Для начальных точек, лежащих в областях $W_1, W_3$ и $W_3$, включая их границы, оптимальные траектории свободной задачи всюду удовлетворяют фазовому ограничению, поэтому они будут оптимальными и в задаче с этим ограничением.

Таким образом, оптимальный синтез в данном случае есть "обрезка" свободного синтеза по линии, составленной из фазовой границы $\Gamma$ и ветви параболы $[C, C']$. 17
5.4 Случай $k < 0$ с одной точкой пересечения

Здесь характерной точкой является точка $C$ касания прямой $\Gamma$ и некоторой параболы семейства $x = \frac{1}{2}y^2 + \text{const}$ (ясно, что она единственна) (см. Рис. 6).

Обозначим через $Q_1$ открытую область, ограниченную прямой $\Gamma$, линией $S$ и параболой $[C,C']$, через $Q_2$ — область, лежащую правее и выше прямой $\Gamma$ и линии $S$, и через $Q_3$ — область между прямой $\Gamma$ и параболой $[C,C']$.

![Diagram](image)

Рис. 6:

В этом случае по-прежнему точки, лежащие на фазовой границе ниже $C$, как и точки из области $Q_3$, недостижимы на траекториях нашей системы. Таким образом, множество начальных допустимых точек $D$ замкнуто, оно состоит из полуплоскости, заданной фазовым ограничением, за вычетом области $Q_3$.

Для начальных точек, лежащих в области $Q_1$ и $Q_2$, включая их границы, оптимальные траектории свободной задачи всюду удовлетворяют фазовому ограничению, поэтому они будут оптимальными и в задаче с этим ограничением.

Таким образом, синтез в данном случае есть "обрезка" свободного синтеза по линии, составленной из фазовой границы $\Gamma$ и ветви параболы $[C,C']$. 
Список литературы

[1] Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. – М., Наука, 1969.

[2] А.Я. Дубовицкий, А.А. Милушин. Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ – 1965 – т. 5, № 3 – с. 395–453.

[3] А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. Теория экстремальных задач. – М., Наука, 1974.

[4] А.А. Милушин, А.В. Дмитрук, Н.П. Осмоловский. Принцип максимума в оптимальном управлении. – Изд-во мехмата МГУ – 2004 – 168 с.

[5] A.V. Dmitruk. On the development of Pontryagin’s Maximum principle in the works of A.Ya. Dubovitskii and A.A. Milyutin // Control & Cybernetics, 2009, v. 38, no. 4a, p. 923–958.

Случай $k > 0$ рассмотрен А.В. Дмитруком. Его исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20169) в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Случай $k < 0$ рассмотрен И.А. Самыловским. Его исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-00103) в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, факультет космических исследований.

Дмитрук Андрей Венедиктович: vraimax@mail.ru.
Самыловский Иван Александрович: ivan.samylovski@cosmos.msu.ru.