On the monotone complexity of the shift operator

Igor S. Sergeev

Abstract

We show that the complexity of minimal monotone circuits implementing a monotone version of the shift operator on \( n \) boolean inputs is \( \Theta(n \log n) \).

Introduction. The recent paper \cite{1} shows that a plausible hypothesis from network coding theory implies a lower bound \( \Omega(n \log n) \) for the complexity of the \( n \)-input boolean shift operator when implemented by circuits over a full basis. As a corollary, the same bound holds for the multiplication of \( n \)-bit numbers. (Definitions of boolean circuits and complexity see e.g. in \cite{8}.) Curiously, nearly at the same time an upper bound \( O(n \log n) \) for multiplication has been proved in \cite{5}. Actually, for the shift operator, the bound \( O(n \log n) \) is trivial.

The shift can be implemented by monotone circuits. The present paper demonstrates that its complexity is bounded by \( \Omega(n \log n) \) with respect to circuits over the basis \( \{ \vee, \wedge \} \). Essentially, the proof of this result was established by Chashkin \cite{3} who solved the close problem of the implementation of the real-valued shift operator by circuits over the basis of 2-multiplexors and binary boolean functions. It occurs that the argument works for the boolean setting as well. On the other hand, an upper bound \( O(n \log n) \) is easy to obtain when a suitable encoding of the shift value is chosen.

A version of the shift operator may be seen as a partially defined order-\( n \) boolean convolution operator. It is known that the complexity of the convolution is \( n^{2-o(1)} \) \cite{4}, while the complexity of the corresponding shift operator is \( \Theta(n \log n) \).

A more general form of shift is permutation. By analogy, one can introduce a monotone permutation operator. If a special encoding on the set

\*e-mail: isserg@gmail.com
of permutations is chosen, then the permutation operator on \( n \) boolean inputs can be implemented with complexity \( O(n \log n) \) employing the optimal sorting network from \([2]\). If size-\( n \) boolean vectors are given as inputs, then there exists a version of the permutation operator, which is the restriction of the \( n \times n \) boolean matrix multiplication operator. The boolean matrix multiplication complexity is known to be \( \Theta(n^3) \) \([7]\). It can be compared with the complexity \( \Theta(n^2 \log n) \) of the corresponding permutation operator. (The lower bound follows from the bound on the complexity of the shift operator.)

**Preliminaries.** Further, \( L(F) \) denotes the complexity of implementing the operator \( F \) by circuits over the basis \( \{\lor, \land\} \).

Let \( \mathbb{B} = \{0, 1\} \) and \( A = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\} \subset \mathbb{B}^n \) be an antichain of cardinality \( n \). By \( X = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \), \( x_i = (x_{i,0}, \ldots, x_{i,q-1})^T \), denote the \((q,n)\)-matrix of boolean variables. Let \( Y = (y_0, \ldots, y_{m-1}) \) denote the vector of boolean variables encoding elements of the antichain \( A \). By \( v \gg k \) we denote the vector obtained from \( v \) via a cyclic shift by \( k \) positions to the right.

Monotone cyclic shift \((mq + m, mq)\)-operator \( S_{q,A}(X, Y) = (s_0, \ldots, s_{n-1}) \) is a partially defined operator taking values \( X \gg k \) for \( Y = \alpha_k \), where \( k = 0, \ldots, n - 1 \).

Consider a few examples of encoding shift values. The vector \((v, \overline{v})\), where \( \overline{v} \) is the componentwise negation, we call **doubling** of the vector \( v \). Typically, the shift value \( k \) is encoded by its binary representation \( [k]_2 \). For the monotone version, one can use doubling of \( [k]_2 \). In this case, \( m = 2(\lceil \log_2 n \rceil + 1) \). The described encoding corresponds to the antichain \( A_0 = \left\{ (\lfloor k \rfloor, \lfloor k \rfloor) \mid 0 \leq k < n \right\} \).

Another natural choice for \( A \) is the set \( A_1 \) of all weight-1 vectors in \( \mathbb{B}^n \). In this case, \( m = n \). Let \( q = 1 \). Define

\[
c_i(X, Y) = \bigvee_{j+k = i \mod n} x_j y_k.
\]

The operator \( C(X, Y) = (c_0, \ldots, c_{n-1}) \) is called a cyclic **boolean convolution** of the vectors \( X \) and \( Y \).

By the definition of the shift operator, \( S_{1,A_1}(X, Y) \) coincides with \( C(X, Y) \) on inputs from \( \mathbb{B}^n \times A_1 \). It can be checked that

\[
S_{1,A_1}(X, Y) = C(X, Y) \lor x_0 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot g \lor r(X, Y),
\]

where \( g \) is an undefined boolean vector, and \( r(X, Y) = 0 \) for \( |Y| \leq 1 \) (here \( |v| \) denotes the weight of the vector \( v \)). The complexity of convolution is known to be almost quadratic, \( L(C) = \Omega(n^2/\log^6 n) \) \([4]\). Supposedly, a trivial upper bound \( L(C) = O(n^2) \) is tight. At the same time, \( L(S_{1,A_1}) = O(n \log n) \). We show below that in fact \( L(S_{1,A}) = \Omega(n \log n) \) for any \( A \).
Now let \( \Pi = \{\pi_0, \ldots, \pi_{n!-1}\} \subset B^m \) be an antichain of cardinality \( n! \). We can assign to its elements different permutations \( \pi \) on the set \( \{0, \ldots, n-1\} \). Denote \( \pi(X) = (x_{\pi(0)}, \ldots, x_{\pi(n-1)}) \). The monotone permutation operator \( P_q,\Pi(X, Y) \) is defined on inputs \( Y \in \Pi \) as \( P_q,\Pi(X, Y) = \pi(X) \), where the permutation \( \pi \) corresponds to the value of \( Y \). Since a cyclic shift is a special case of permutation, any permutation operator can be viewed as a shift operator defined on a larger domain.

Trivially, any permutation \( \pi \) may be represented by the vector of numbers \( (\pi(0)\mod 2, \ldots, \pi(n-1)\mod 2) \). Let \( \Pi_0 \) denote the corresponding coding set (it constitutes an antichain).

Otherwise, permutations may be specified as square boolean matrices with all rows and columns having weight 1. Denote the set of such matrices by \( \Pi_1 \subset B^{n \times n} \). The corresponding permutation operator performs the multiplication of the permutation matrix \( Y = \{y_{j,k}\} \) by the matrix of variables \( X \). Define

\[
z_{i,k}(X, Y) = \bigvee_{j=0}^{n-1} x_{i,j} y_{j,k}.
\]

Then \( Z(X, Y) = \{z_{i,k}\} : B^{q \times n} \times B^{n \times n} \to B^{q \times n} \) is the operator of boolean product of matrices \( X \) and \( Y \). By definition, the operators \( P_q,\Pi_1 \) and \( Z \) take the same values on inputs from \( B^{q \times n} \times \Pi_1 \). It is known that \( L(Z) = qn(2n-1) \) \( \Omega \) (see also \( \Omega \)), which means: the naive method to multiply boolean matrices is optimal. On the other hand, \( L(P_q,\Pi_1) = O(qn \log n + n^2) \) (see below). Moreover, we manage to show that \( L(P_q,\Pi) = \Omega(qn \log n) \) for any \( \Pi \), and this bound is achievable.

**Upper complexity bounds.** For \( v = (v_0, \ldots, v_{m-1}) \in B^m \) let \( Y^v = \bigwedge_{v_i=1} y_i \) denote the monomial of variables \( y_i \) corresponding to the vector \( v \). Let \( L(A) \) stand for the complexity of computation of the set of monomials \( \{Y^\alpha \mid \alpha \in A\} \).

**Theorem 1.** \( L(S_{q,A}) \leq L(A) + O(qn \log n) \).

**Proof.** The standard circuit for the shift operator consists of \( \log_2 n \) layers of \( n \) multiplexors in each. It can be built according to the binary representation of the shift value \( k \). The first layer shifts the input by either 0 or 1 positions, depending on the value of the least significant bit of \( k \). The second layer shifts by 0 or 2 positions, etc.

The monotone circuit employs indicators \( Y^{i,\beta} = \bigvee_{[k/2^i] = \beta \mod 2} Y^{\alpha_i} \) of equality of bits of \( Y \) to zeros or ones. Instead of multiplexors, there are used similar monotone subcircuits that calculate operators of the form \( Y^{i,1}a \lor Y^{i,0}b \).

It remains to note that all boolean sums \( Y^{i,\beta} \) can be computed with complexity \( O(n) \). \( \square \)
In particular, since $L(A_0) = O(n)$ and $L(A_1) = 0$, we obtain $L(S_{1,A_0}), L(S_{1,A_1}) \in O(n \log n)$.

To derive the upper bounds on the complexity of the permutation operator, we use a circuit $\Sigma$ sorting $n$ elements with complexity $O(n \log n)$ provided by [2]. Such a circuit consists of comparator gates that order a pair of inputs.

**Theorem 2.**

(i) There exists an antichain $\Pi$ such that $L(P_{q,\Pi}) = O(qn \log n)$.

(ii) $L(P_{q,\Pi_1}) = O(qn \log n + n^2)$.

**Proof.** A set $\Pi$ can be specified following the circuit $\Sigma$. Assign to any permutation $\pi$ a linear order $x_{\pi(0)} > x_{\pi(1)} > \ldots > x_{\pi(n-1)}$ on the set of inputs of $\Sigma$ (in general, we do not consider these inputs boolean). Let $\Sigma$ receive inputs ordered in correspondence to a given permutation $\pi$. Assign to each comparator $e$ a boolean parameter $y_e$ whose value is determined by the result of the comparison. Let the doubling of the vector of parameters $y_e, e \in \Sigma$, encode a permutation $\pi$.

Now, we transform the circuit $\Sigma$ to a monotone circuit for $P_{q,\Pi}(X, Y)$, replacing any comparator $e$ receiving vector inputs $a, b$ with a subcircuit that evaluates vectors $ay_e \lor by_e$ and $ay_e \lor by_e$.

Let us prove $(ii)$. First, recode $Y$ from $\Pi_1$ to $\Pi_0$. To do this, one simply needs to compute positions $y'_0, \ldots, y'_{n-1}$ of 1s in the columns of the matrix $Y$. The position of 1 in a weight-1 column may be calculated by a trivial circuit of linear complexity. Therefore, the complexity of the recoding is $O(n^2)$.

Next, arrange the inputs $x_i$ in accordance to the ordering of numbers $y'_i$ with the use of the circuit $\Sigma$. At each node of the obtained circuit two $y'_i$ inputs are compared and, depending on the result of the comparison, the order of the vectors $x_i$ accompanied by the numbers $y'_i$ is determined. The complexity of comparison is linear, so the complexity of the subcircuit at each node is $O(q + \log n)$. $\square$

**Lower complexity bounds.** The proof of the following theorem closely follows the proof of the main result in [3].

**Theorem 3.** For any choice of antichain $A$ of cardinality $n$ the following inequality holds: $L(S_{q,A}) \geq qn \log_2 n - O(qn)$.

**Proof.** Essentially, it suffices to consider the case $q = 1$. Let $S$ be a monotone circuit of complexity $L$ that computes $S_{1,A}(X, Y)$.

a) First, note that for any assignment $Y = \alpha_k$ for each $i$, the circuit $S$ contains a path connecting the input $x_i$ and the output $s_{i+k \mod n}$, and passing exclusively through the gates whose outputs return the function $x_i$. Indeed, $s_{i+k \mod n}(X, \alpha_k) = x_i$ by definition. It remains to check that if $x_i = f \lor g$ or $x_i = fg$, where $f$ and $g$ are monotone functions, then either
From $x_i = f \lor g$ it follows that $f \leq x_i$ and $g \leq x_i$. Assume that $f \neq x_i$ and $g \neq x_i$. It means that $f = g = 0$ under the assignment $x_i = 1$, $x_j = 0$ for all $j \neq i$. But then $f \lor g = 0 \neq x_i$. A contradiction. The case $x_i = f g$ follows by a dual argument.

So, moving from an output $s_{i+k \text{mod} n}$ towards the inputs of the circuit, for any gate, we can select an appropriate input computing the function $x_i$. Finally, we obtain the desired path.

b) Denote the path providing by the above argument by $p_{i,k}$. Let $\chi(e)$ stand for the number of paths $p_{i,k}$, $0 \leq i, k < n$, passing through the gate $e$ in the circuit $S$. Note that $\chi(e) \leq n$ for all $e \in S$. Indeed, any assignment $Y = \alpha_k$ uniquely defines the function of variables $X$ computed at the output of any gate $e$. Thus, $e$ does not belong to two different paths $p_{i,k}$ and $p_{j,k}$. Consequently,

$$\sum_{e \in S} \chi(e) \leq Ln. \tag{1}$$

Consider the subcircuit $S_j$ obtained by combining all $n$ paths $p_{i,k}$ leading to the output $s_j$, i.e. satisfying the condition $i + k = j \text{mod} n$. By construction, $S_j$ is a connected binary directed graph with $n$ inputs and one output.

We manage to bound $\sum_{e \in S_j} \chi(e, j)$ following a simple argument from [6].

Due to the binarity property, the subcircuit $S_j$ has an input at a distance of at least $\log_2 n$ edges from the output. In other words, some path making up $S_j$ contains at least $\log_2 n$ gates. Exclude this path and consider a subcircuit obtained by combining the remaining $n - 1$ paths. Then, it contains a path of length at least $\log_2 (n - 1)$. We proceed this way until there is no path remained. The argument leads to the bound

$$\sum_{e \in S_j} \chi(e, j) \geq \log_2 n! = n \log_2 n - O(n), \tag{2}$$

following by

$$\sum_{e \in S} \chi(e) = \sum_j \sum_{e \in S_j} \chi(e, j) \geq n^2 \log_2 n - O(n^2). \tag{3}$$

Putting together (1) and (3), we establish the inequality $L \geq n \log_2 n - O(n)$.

---

1 Any vertex receives at most two incoming edges.

2 In [6], the argument was used to bound the monotone complexity of the boolean sorting operator, see also [8].
d) For $q > 1$, we consider separately the components of the input and output vectors at the same positions. This results in $q$ groups of paths $p_{i,j}$. The inequality (1) remains valid, and the inequality (2) holds for any of $qn$ outputs. Thus, the required bound finally follows.

Since a permutation operator is a more completely defined shift operator, as a corollary we establish $L(P_q, \Pi) \geq qn \log_2 n - O(qn)$ for any $\Pi$.

The research is supported by RFBR grant, project no. 19-01-00294a.

References

[1] Afshani P., Freksen C., Kamma L., Larsen K. G. Lower bounds for multiplication via network coding. arXiv:1902.10935.

[2] Ajtai M., Komlós J., Szemerédi E. Sorting in $c \log n$ parallel steps. Combinatorica. 1983. 3(1), 1–19.

[3] Chashkin A. V. On the complexity of a cyclic shift of a set of real numbers. Discrete Analysis and Operations Research. Ser. 1. 2006. 13(4), 89–92 (in Russian). [Eng. translation in J. Applied and Industrial Math. 2007. 1(2), 175–177.]

[4] Grinchuk M. I., Sergeev I. S. Thin circulant matrices and lower bounds on the complexity of some Boolean operators. Discrete Analysis and Operations Research. 2011. 18(5), 38–53 (in Russian). [Eng. translation in arXiv:1701.08557]

[5] Harvey D., van der Hoeven J. Integer multiplication in time $O(n \log n)$. Tech. report no. 02070778, HAL, 2019.

[6] Lamagna E. A., Savage J. E. Combinational complexity of some monotone functions. Proc. 15th IEEE Symp. on Switching and Automata Theory. New Orleans, 1974, 140–144.

[7] Paterson M. S. Complexity of monotone networks for Boolean matrix product. Theor. Comput. Sci. 1975. 1, 13–20.

[8] Wegener I. The complexity of Boolean functions. Stuttgart: Wiley–Teubner, 1987.
О монотонной сложности оператора сдвига

И. С. Сергеев*

Аннотация

В настоящей заметке показано, что минимальные монотонные схемы, реализующие монотонную версию оператора сдвига булевых векторов длины $n$, имеют сложность $\Theta(n \log n)$. Введение. В недавней работе [3] демонстрируется, что правдоподобная гипотеза из теории сетевого кодирования влечет нижнюю оценку $\Omega(n \log n)$ сложности оператора сдвига булевых векторов длины $n$ при реализации схемами в полном базисе и, как следствие, такую же оценку для сложности умножения $n$-разрядных чисел. (Определения булевых схем и сложности см., например, в [8].) Интересно, что практически одновременно появилась работа [5], в которой построены схемы для умножения сложности $O(n \log n)$. Собственно для оператора сдвига оценка сложности $O(n \log n)$ тривиальна.

Сдвиг может быть реализован монотонными схемами. В настоящей работе доказывается, что его сложность при реализации схемами над базисом $\{\vee, \wedge\}$ оценивается как $\Omega(n \log n)$. По существу, доказательство этой оценки построено А. В. Чашкиным [2] при решении близкой задачи реализации сдвига действительнозначного вектора схемами над базисом из 2-мультплексоров и бинарных булевых функций. Как будет показано далее, практически без изменений рассуждение переносится на булев случай. С другой стороны, верхнюю оценку $O(n \log n)$ несложно получить при подходящей кодировке величины сдвига.

Доопределением одного из вариантов оператора сдвига является оператор булевой свертки порядка $n$. Известно, что сложность свертки имеет величину $n^{2-o(1)}$ [1], в то время как сложность соответствующего оператора сдвига оказывается равной $\Theta(n \log n)$.

Операцию сдвига обобщает операция перестановки. По аналогии, можно определить монотонный оператор перестановки. При условии

*e-mail: isserg@gmail.com
введения специальной кодировки на множестве перестановок оператор перестановки \( n \) булевых элементов можно реализовать со сложностью \( O(n \log n) \), используя оптимальную схему сортировки из \( \mathbb{P} \). Если элементы-входы представлены булеевыми векторами длины \( n \), то в одном из вариантов оператор перестановки является сужением оператора булева умножения квадратных матриц порядка \( n \). Известно, что сложность матричного умножения имеет величину \( \Theta(n^3) \), тогда как сложность соответствующего оператора перестановки оказывается равной \( \Theta(n^2 \log n) \) (нижняя оценка следует из оценки сложности оператора сдвига).

Предварительные понятия. Далее сложность реализации оператора \( F \) схемами над базисом \( \{\lor, \land\} \) будем обозначать через \( L(F) \).

Положим \( \mathbb{B} = \{0, 1\} \). Пусть \( A = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\} \subset \mathbb{B}^m \) — антитип мощности \( n \). Через \( X = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \), \( x_i = (x_{i,0}, \ldots, x_{i,q-1})^T \), обозначим \((q, n)\)-матрицу булевых переменных. Через \( Y = (y_0, \ldots, y_{m-1}) \) будем обозначать вектор булевых переменных, кодирующий элементы антитип \( A \). Через \( v \gg k \) обозначим вектор, получаемый из \( v \) циклическим сдвигом на \( k \) позиций вправо.

Монотонный циклический \((nq + m, nq)\)-оператор сдвига \( S_{q,A}(X, Y) = (s_0, \ldots, s_{n-1}) \) — это частично определенный оператор, принимающий значения \( X \gg k \) при \( Y = \alpha_k \), где \( k = 0, \ldots, n - 1 \).

Рассмотрим примеры кодировки величин сдвига. Вектор \((v, \overline{v})\), где \( \overline{v} = \text{ операция покомпонентного отрицание, назовем удвоением вектора } v \). Обычно величина сдвига кодируется просто своей двоичной записью. В монотонной версии можно использовать удвоение двоичной записи. При этом \( m = 2(\lceil \log_2 n \rceil + 1) \). Если \([k]_2 \) означает двоичную запись числа \( k \), то описанный способ использует антитип \( A_0 = \left\{ \left([k]_2, \overline{[k]_2}\right) \mid 0 \leq k < n \right\} \).

Еще один распространенный способ задания антитип \( A_1 \) всех векторов веса 1 в \( \mathbb{B}^n \). В этом случае \( m = n \). Пусть \( q = 1 \). Положим

\[ c_i(X, Y) = \bigvee_{j+k = i \text{ mod } n} x_j y_k. \]

Оператор \( C(X, Y) = (c_0, \ldots, c_{n-1}) \) называется циклическими булеевой сверткой векторов \( X \) и \( Y \).

По определению оператора сдвига, \( S_{1,A_1}(X, Y) \) совпадает с \( C(X, Y) \) на множестве \( \mathbb{B}^n \times A_1 \). Можно проверить, что

\[ S_{1,A_1}(X, Y) = C(X, Y) \lor x_0 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot g \lor r(X, Y), \]

где \( g \) — неопределенный булев вектор, а \( r(X, Y) = 0 \) при условии \( |Y| \leq 1 \) (через \(|v|\) обозначается вес вектора \( v \)). И из \( \mathbb{P} \) известно, что сложность...
свертки почти квадратична, \( L(C) = \Omega(n^2 / \log^6 n) \), а предположительно
тривиальная верхняя оценка \( L(C) = O(n^2) \) является неулучшаемой. В то же время \( L(S_{1, A_1}) = O(n \log n) \). Ниже будет показано, что на самом деле \( L(S_{1, A}) = \Omega(n \log n) \) при любом \( A \).

Теперь пусть \( \Pi = \{ \pi_0, \ldots, \pi_{n-1} \} \subset \mathbb{B}^n \) — антицепь мощности \( n \!). Элементам антицепи можно сопоставить различные перестановки \( \pi \) на множестве \( \{0, \ldots, n - 1\} \). Обозначим \( \pi(X) = (x_{\pi(0)}, \ldots, x_{\pi(n-1)}) \). Мононотонный оператор перестановки \( P_{q, \Pi}(X, Y) \) определяется при \( Y \in \Pi \) как \( P_{q, \Pi}(X, Y) = \pi(X) \), где перестановка \( \pi \) соответствует значению \( Y \).

Поскольку циклический сдвиг является частным случаем перестановки, любой оператор перестановки является доопределением некоторого оператора сдвига.

Тривиально, любую перестановку \( \pi \) можно закодировать вектором двоичных кодов \((\left[ \pi(0) \right]_2, \ldots, \left[ \pi(n-1) \right]_2)\). Соответствующее множество кодов обозначим через \( \Pi_0 \) (она является антицепью). Иначе, перестановки можно записывать квадратными булевым и матрицами, в каждой строке и каждом столбце которых ровно одна единица. Обозначим множество таких матриц через \( \Pi_1 \subset \mathbb{B}^n \times \mathbb{B}^n \). Действие соответствующего оператора перестановки задается умножением матрицы перестановки \( Y = \{y_{j,k}\} \) на матрицу переменных \( X \). Обозначим
\[
    z_{i,k}(X, Y) = \bigvee_{j=0}^{n-1} x_{i,j} y_{j,k}.
\]
Оператор \( Z(X, Y) = \{z_{i,k}\} : \mathbb{B}^{q \times n} \times \mathbb{B}^{n \times n} \to \mathbb{B}^{q \times n} \) выполняет булево умножение матриц \( X \) и \( Y \). По построению, на множестве \( \mathbb{B}^{q \times n} \times \Pi_1 \) значения операторов \( P_{q, \Pi_1} \) и \( Z \) совпадают. Известно [7], что \( L(Z) = qn(2n - 1) \) (см. также [3]), что значит: наивный способ умножения матриц оптимален. С другой стороны, как можно проверить, \( L(P_{q, \Pi_1}) = O(qn \log n + n^2) \). Ниже будет показано, что \( L(P_{q, \Pi}) = \Omega(qn \log n) \) при любом \( \Pi \), и эта оценка достижима.

**Верхние оценки сложности.** Пусть \( v = (v_0, \ldots, v_{m-1}) \in \mathbb{B}^m \). Множество переменных \( y_i \), соответствующий вектору \( v \), обозначим через \( Y^v = \bigwedge_{0 \leq i < m} y_i \). Пусть \( L(A) \) означает сложность реализации системы мономов \( \{Y^\alpha \mid \alpha \in A\} \).

**Теорема 1.** Справедливо соотношение \( L(S_{q, A}) \leq L(A) + O(qn \log n) \).

**Доказательство.** Стандартная схема сдвига в полном базисе состоит из \( \log_2 n \) слоев по \( n \) мультиплексоров в каждом. Она строится в соответствии с двоичной записью величины сдвига \( k \). На первом слое, в зависи-
мости от значения младшего разряда числа \( k \), выполняется сдвиг на 0 или на 1 позицию. На следующем слое — еще на 0 или на 2 и т.д.

В монотонном случае роль двоичных разрядов играют индикаторы \( Y^{i, \beta} = \bigvee_{[k/2^i]}^{\beta \mod 2} Y^{\alpha_i} \), равенства разрядов величины сдвига нулю или единице. Вместо мультиплексоров используются аналогочные монотонные подсхемы, реализующие операторы вида \( Y^{i, 1} a \lor Y^{i, 0} b \).

Остаётся заметить, что все булевы суммы \( Y^{i, \beta} \) можно вычислить со сложностью \( O(n) \).

В частности, ввиду \( L(A_0) = O(n) \) и \( L(A_1) = 0 \) получаем \( L(S_1, A_0), L(S_1, A_1) \in O(n \log n) \).

Для вывода верхних оценок сложности оператора перестановки воспользуемся схемой \( \Sigma \) сортировки \( n \) элементов сложности \( O(n \log n) \) из работы \( [\Pi] \). Такая схема состоит из элементов-компараторов, упорядочивающих пару входов.

**Теорема 2.**

(i) Существует антицепь \( \Pi \), такая, что \( L(P_{q, \Pi}) = O(qn \log n) \).

(ii) Справедливо соотношение \( L(P_{q, \Pi_1}) = O(qn \log n + n^2) \).

**Доказательство.** Множество \( \Pi \) построим, следуя схеме \( \Sigma \). Каждой перестановке \( \pi \) сопоставим линейный порядок \( x^{\pi(0)} > x^{\pi(1)} > \ldots > x^{\pi(n-1)} \) на множестве входных элементов схемы \( \Sigma \) (эти входы, вообще говоря, не считаем булевыми). Пусть на вход схемы \( \Sigma \) подан входной набор элементов, значения которых удовлетворяют указанному порядку (соответствующему перестановке \( \pi \)). Каждому компаратору \( e \) сопоставим булав признак \( y_e \), значение которого определяется результатом сравнения. Перестановку \( \pi \) закодируем удвоением вектора значений признаков \( y_e, e \in \Sigma \).

Теперь схему \( \Sigma \) можно перестроить в схему для \( P_{q, \Pi}(X, Y) \), заменив каждый компаратор \( e \) со входами-векторами \( a, b \) подсхемой, вычисляющей выражения \( ay_e \lor by_e \) и \( ay_e \lor by_e \).

Докажем (ii). Перекодируем входы \( Y \) из \( \Pi_1 \) в \( \Pi_0 \). Для этого нужно просто вычислить номера \( y'_0, \ldots, y'_{n-1} \) позиций единиц в столбцах матрицы \( Y \). Номер единицы в столбце вычисляется тривиальной схемой линейной сложности, следовательно, общая сложность перехода равна \( O(n^2) \).

Далее упорядочим входы \( x_i \) в соответствии с номерами \( y'_i \), используя схему \( \Sigma \). В каждом узле схемы выполняется сравнение номеров входов \( y'_i \) и, в зависимости от результата сравнения, определяется порядок векторов \( x_i \) и номеров \( y'_i \) на выходе узла. Сложность сравнения линейна, поэтому обработка в каждом узле выполняется подсхемой сложности \( O(q + \log n) \).
Нижние оценки сложности. Доказательство следующей теоремы следует доказательству основного результата [2].

Теорема 3. При любом выборе антицепи $A$ мощности $n$ справедливо соотношение $L(S_{q,A}) \geq qn \log_2 n - O(qn)$.

Доказательство. Фактически достаточно рассмотреть случай $q = 1$. Пусть $S$ — монотонная схема сложности $L$, вычисляющая $S_{1,A}(X,Y)$.

а) Заметим, что при любой подстановке вида $Y = \alpha_k$ для каждого $i$ в схеме имеется путь, соединяющий вход $x_i$ и выход $s_i + k \mod n$, проходящий исключительно через элементы, на выходах которых вычисляется функция $x_i$.

Действительно, $s_i + k \mod n(X, \alpha_k) = x_i$ по определению. Остается проверить, что если $x_i = f \lor g$ или $x_i = fg$, где $f$ и $g$ — монотонные функции, то либо $f = x_i$, либо $g = x_i$. Из $x_i = f \lor g$ следует, что $f \leq x_i$ и $g \leq x_i$. Пусть $f \neq x_i$ и $g \neq x_i$. Это значит, что $f = g = 0$ при подстановке $x_i = 1$, $x_j = 0$ для всех $j \neq i$. Но тогда и $f \lor g = 0 \neq x_i$. Противоречие. Случай $x_i = fg$ разбирается двойственным образом.

Таким образом, двигаясь от выхода $s_i + k \mod n$ в направлении входов схемы, для каждого очередного элемента можно выбрать вход со значением $x_i$. В итоге получится искомый путь.

б) Обозначим построенный в предыдущем пункте путь через $p_{i,k}$. Пусть $\chi(e)$ обозначает число путей $p_{i,k}$, $0 \leq i, k < n$, проходящих через элемент $e$ в схеме $S$. Заметим, что $\chi(e) \leq n$ для всех $e \in S$. Действительно, подстановка $Y = \alpha_k$ однозначно задает функцию переменных $X$, реализуемую на выходе любого элемента $e$, поэтому через $e$ не могут проходить два разных пути $p_{i,k}$ и $p_{j,k}$. Таким образом,

$$
\sum_{e \in S} \chi(e) \leq Ln. 
$$

в) Оценим сумму $\sum_{e \in S} \chi(e)$ другим способом. Обозначим через $\chi(e,j)$ число путей $p_{i,k}$, проходящих через $e$ и ведущих к выходу $s_j$. По построению, $\sum_j \chi(e,j) = \chi(e)$.

Рассмотрим подсхему $S_j$, получаемую объединением всех $n$ путей $p_{i,k}$, ведущих к выходу $s_j$, т.е. удовлетворяющих условию $i + k = j \mod n$. По построению, подсхема $S_j$ имеет вид связного бинарного (не более двух входящих ребер у каждой вершины) ориентированного графа с $n$ входами и одним выходом. Оценим сумму $\sum_{e \in S_j} \chi(e,j)$, используя простое рассуждение из [6]. (В работе [6] оценивалась монотонная сложность оператора сортировки булевого набора, см. также [8].)
Ввиду свойств бинарности, в подсеми $S_j$ имеется вход, удаленный от выхода на расстояние не менее $\log_2 n$ ребер. Иначе говоря, один из путей, образующих схему, проходит как минимум через $\log_2 n$ элементов. Исключим этот путь и рассмотрим подсхему, полученную объединением оставшихся $n-1$ путей. В ней найдется путь длины не менее $\log_2(n-1)$. Будем продолжать в том же духе до исчерпания множества путей. Рассуждение приводит к оценке

$$
\sum_{e \in S_j} \chi(e, j) \geq \log_2 n! = n \log_2 n - O(n),
$$

из которой следует

$$
\sum_{e \in S} \chi(e) = \sum_j \sum_{e \in S_j} \chi(e, j) \geq n^2 \log_2 n - O(n^2).
$$

Сопоставляя (1) и (3), получаем соотношение $L \geq n \log_2 n - O(n)$.

г) При $q > 1$ рассматриваем по отдельности компоненты векторов-входов и векторов-выходов на одинаковых позициях. При этом возникает $q$ комплексов путей $p_{i,j}$. Неравенство (1) сохраняет силу, а неравенство (2) выполняется для каждого из $qn$ выходов, откуда следует окончательная оценка.

Так как оператор перестановки является доопределением оператора свдвига, в качестве следствия получаем $L(P_{q,\Pi}) \geq qn \log_2 n - O(qn)$ при любом $\Pi$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 19-01-00294а.

Список литературы

[1] Гринчук М. И., Сергеев И. С. Редкие циркулянтные матрицы и нижние оценки сложности некоторых булевых операторов. Дискретный анализ и исследование операций. 2011. 18(5), 38–53.

[2] Чашкин А. В. О сложности циклического свдвига набора действительных чисел. Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 2006. 13(4), 89–92.

[3] Afshani P., Freksen C., Kamma L., Larsen K. G. Lower bounds for multiplication via network coding. arXiv:1902.10935.

[4] Ajtai M., Komlós J., Szemerédi E. Sorting in $c \log n$ parallel steps. Combinatorica. 1983. 3(1), 1–19.
[5] Harvey D., van der Hoeven J. Integer multiplication in time $O(n \log n)$. Tech. report no. 02070778, HAL, 2019.

[6] Lamagna E. A., Savage J. E. Combinational complexity of some monotone functions. Proc. 15th IEEE Symp. on Switching and Automata Theory. New Orleans, 1974, 140–144.

[7] Paterson M. S. Complexity of monotone networks for Boolean matrix product. Theor. Comput. Sci. 1975. 1, 13–20.

[8] Wegener I. The complexity of Boolean functions. Stuttgart: Wiley–Teubner, 1987.