**TRANSLATION:** **ABOUT A METHOD OF OBTAINING VOLUMETRIC IMAGES BY MEANS OF X-RAY RADIATION**

**ORIGINAL HEADER**

Известия Киевского Ордена Ленина Политехнического Института
Том 22, 154 (1957)

О МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ ОБЪЕМНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
С. И. Тетельбаум

Bulletin of the Kiev Polytechnic Institute
Volume 22, 154 (1957)

ABOUT A METHOD OF OBTAINING VOLUMETRIC IMAGES BY MEANS OF X-RAY RADIATION
S.I. Tetelbaum

Translation: Alex Gustschin

---

**Introduction**

State-of-the art x-ray technology allows to obtain shadow images of an object under investigation. The shadow-like character of the image on the fluorescent screen or the recorded x-ray film results from intensities of radiation transmitting the object, which depend on the effective attenuation of all elements of the object along one straight line of every ray of the beam.

The observed radiation intensity distribution \( f \) in an image in a certain plane in space depends on the attenuation coefficient \( F(x, y, z, \lambda) \) of the object’s elements, which is a function of the geometrical coordinates and the wavelength of the radiation \( \lambda \) as well as other experimental conditions.

A volumetric representation of the studied object can be obtained if the function \( F \) (characterized by the local attenuation coefficient of every element of the three-dimensional object) is determined by experiment. There is some functional dependence between functions \( f \) and \( F \):

\[
f = \Phi(F).
\]  

---

1Chair of Biomedical Physics, Department of Physics and Munich School of Bioengineering, Technical University of Munich, 85748, Garching, Germany, alex.gustschin@ph.tum.de
Translation: About a Method of Obtaining Volumetric Images by Means of X-ray Radiation

In conventional methods of x-ray technology this relation does not provide a unique solution for the function $F$ and the observed shadow image can be — generally speaking — generated by some high plurality of different objects resulting in the same attenuation.

In this article — based on some general ideas on possible compensations of image distortions generated by optical and analog instruments [1] — a method is given to obtain three-dimensional images of objects with x-rays or other kind of sufficiently penetrating radiation. Likewise, an image of a sufficiently thin layer of the object which is not altered by features of apposed layers can be obtained.

For this purpose, the conditions of the experiment are chosen such that the observed intensity distribution (which can be measured directly or provided by previously taken radiographs or fluorographs) clearly defines the object, i.e. so that the equation of the kind [1] has a single solution. In this case, using the inverse operator

$$F = \Phi^*(f)$$  \hspace{1cm} (2)

it is possible to find the required function $F$ which determines the local attenuation coefficient in every element of the three-dimensional object.

Integral Equation of the Problem

Let the point-like, non-directional source $S$ (Fig. 1) with known coordinates $\alpha, \beta, \gamma$ emit x-rays or other penetrating radiation with spectral distribution $\phi_1(\lambda)$. The object—confined in three dimensions—is placed between the planes at $x = 0$ and $x = L$. The intensity of the radiation is determined in a plane of observation $\eta O_1 \zeta$ parallel to the planes mentioned before.

We will characterize the object with the local attenuation coefficient $F(x, y, z, \lambda)$. Let’s redefine function $F$ in the space between $x = 0$ and $x = L$ and set $F = 0$ outside the object. At this fixed geometry of the system the distribution of radiation intensity (up to a constant factor) will be:

$$F(\eta, \zeta, \lambda) = \frac{\phi_1(\lambda) \exp \left[ -\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \eta, \zeta, \xi) \int_0^L F(x, y, z, \lambda) \, dx \right]}{(\xi + \alpha)^2 \left[ \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \eta, \zeta, \xi) \right]^3},$$ \hspace{1cm} (3)

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \eta, \zeta, \xi) = \sqrt{1 + \left( \frac{\eta - \beta}{\xi + \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\zeta - \gamma}{\xi + \alpha} \right)^2},$$

where

$$y = \beta \left( 1 + \frac{x + \alpha}{\xi - \alpha} \right) + \eta \frac{x + \alpha}{\xi + \alpha}; \quad z = \gamma \left( 1 + \frac{x + \alpha}{\xi - \alpha} \right) + \zeta \frac{x + \alpha}{\xi + \alpha}.$$ 

Equation (3) considers the attenuation of the radiation caused by absorption in the object, weakening due to the divergent cone of the beam as well as the inclined incidence of the rays onto the flat observation plane. The integral equation (3) does not satisfy the criteria for a unique, continuous
solution and function $F$ cannot be uniquely determined from the known function $f$. In conventional x-ray technology an additional spectral averaging occurs so that the brightness of the fluorescent screen or the darkening of the film during a static exposure is determined by the expression:

$$B(\eta, \zeta) = \Theta\left[\int_{0}^{\infty} \phi_{2}(\lambda) f(\eta, \zeta, \lambda) \, d\lambda\right].$$  \hspace{1cm} (4)

In this expression $\phi_{2}(\lambda)$ and $\Theta$ are describing the spectral sensitivity and the darkening function of the x-ray film or the respective characteristics of the screen. In order to obtain the relations allowing to unambiguously determine the absorption coefficient in each element of the volume, we will determine the function $f$ with continuous change in spatial relation of the radiation source, object and the plane of detection within some boundaries. In this case the respective integral equation will satisfy the conditions for a unique continuous solution and the function of interest $F$ can be determined unambiguously. If, for example, any coordinate of the radiation source during the examination is altered we get instead of equation (3) an integral equation:

$$F(\eta, \zeta, \sigma, \lambda) = \frac{\phi_{1}(\lambda) \exp\left[-\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \eta, \zeta, \xi) \int_{0}^{L} F(x, y, z, \lambda) \, dx\right]}{(\xi + \alpha)^{2}[\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \eta, \zeta, \xi)]^{3}},$$ \hspace{1cm} (5)

where $\sigma$ is equal $\alpha$, $\beta$ or $\gamma$, satisfying the conditions of a unique solution. A convenient method to change the relative arrangement might also be the rotation of the object around a stationary axis.
Case of object rotation

Let’s consider a simplified case where the source is sufficiently distanced from the object. Let the object under study, whose cross sections (hatched) are shown in mutually perpendicular planes $\xi O_1 z$ and $x O y$ in Fig. 2, be irradiated by a uniform, parallel beam of penetrating radiation propagating in the direction $O_1 \zeta$. Let’s determine the function $F(x, y, z, \lambda)$ in the cylinder of radius $R$ and height $H$ enclosing the object and setting $F = 0$ outside the object in the cylinder. Let’s find the intensity distribution of the radiation $I$ in the observation plane $\eta O_1 z$ during the rotation of the object around the axis $Oz$ with angular velocity $d\tau/dt$. Up to a constant factor we get:

$$f(\eta, z, \tau, \lambda) = \phi_1(\lambda) \exp\left[-\int_{-\sqrt{R^2-\eta^2}}^{\sqrt{R^2-\eta^2}} F(x, y, z, \lambda) \, d\xi\right],$$

(6)

where

$$x = \xi \cos \tau + \eta \sin \tau; \quad y = -\xi \sin \tau + \eta \cos \tau;$$

and $\tau$ is the angle between $O\xi$ and $Ox$ describing the rotation of the object.

The integral equation (6) likewise satisfies the conditions of a unique, continuous solution. If, for example, the observation is conducted in a relatively narrow interval of wavelengths around
\(\lambda_1\) so that \(F(x, y, z, \lambda_1) = F_1(x, y, z)\) and respectively \(f(\eta, z, \tau, \lambda_1) = f_1(\eta, z, \tau)\) the solution of equation (6) becomes:\(^2\)

\[
F(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\delta \to +0} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \sin (\varphi + \tau) - \eta}{r^2 + \delta^2} \ln \frac{r \sin (\varphi + \tau) - \eta}{r^2 + \delta^2} d\eta d\tau,
\]

where

\[
x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad 0 \leq r < R.
\]

The operation of finding function \(F\) from the experimentally determined function \(f\) can be executed automatically with the help of a respective analog computing device. For a hardware-based determination of function \(F\) the equation (6) can be rearranged to

\[
F_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{\partial}{\partial \eta} f_1(\eta, z, \tau) d\eta d\tau,
\]

which is derived from (7) taking the limit. Using (8) it should be noted that the order of integration cannot be interchanged. Deriving (8) some natural boundary conditions connected to a hardware-based determination of function \(F\) were taken into account (continuous derivatives up to the third).

It should be noted that the considered condition of a parallel beam (which was done for simplicity) is not mandatory. In the case of a relatively close placement of the radiation source the integral equation corresponding to the rotating object has also a unique solution.

With a sufficiently fast operation of obtaining a volumetric “frame” an observation of a moving objects can be realized, in which \(F\) also depends on time \(t\).

It is worth noting another principal possibility to improve the differentiation of some parts of the object, distinguished by their different dependence of the local attenuation coefficient on the wavelength. When \(F(x, y, z)\) is determined e.g. in three different, relatively narrow wavelength intervals and the respective images are retrieved, they can be colored with primary colors and merged. The result will be a conditionally colored image, which could provide, e.g. in medicine, additional diagnostic possibilities.

Since the function \(f\) has to be acquired, it can be e.g. implemented with a fluorographic frame recorder taking a series of shadow images for discrete values of \(\tau = \tau_0 + n\Delta \tau (n = 1, 2, 3, \ldots, m)\). It should be considered that reducing the interval \(\Delta \tau\) and increasing \(m\) the achievable detail reproduction of the function \(F\) is increased.

A schematic drawing of the setup is shown in Fig. 3a. Here is: A—source of radiation, Б—object, Б—grid-like lead filter absorbing the scattered rays, Г—fluorescent screen (equipped with a light amplifier, if the total radiation dose should be decreased), Д—objective, Е—film.

---

\(^2\)The given calculation was performed by B. I. Korenblum
The kinematic coupling between the object rotation drive and the film translation device is indicated by the dot-dashed lines. Studying a thin layer the recording of the function \( f(\eta, \tau) \) can be realized in the form of an encoded radiograph on a uniformly moving film and a uniform object rotation. The respective setup is depicted in Fig. 3b. The cross-sections of the lead slit collimators are cross-hatched.

**Conclusions**

The article demonstrates a principle possibility of determining the local attenuation coefficient in every element of a three-dimensional object using penetrating radiation. The task is expressed as an integral equation and the experimental conditions are chosen such that this equation has a unique solution. The possibility of obtaining volumetric x-ray images and radiographs of thin layers is shown as well as the use of conditional color contrasting. The considered method is of promising interest for x-ray and gamma-based defect detection as well as for medical diagnostics.

**References**

[1] Тетельбаум С. И., О задаче улучшения изображений, получаемых при помощи оптических и аналогичных инструментов, Известия Киевского ордена Ленина политехнического института, т. XXI стр. 222 (1956)

[2] Роль стереоскопии в трехмерных радиолокационных индикаторах, «Вопросы радиолокационной техники», № 2, стр. 44, 1955,
Translation: About a Method of Obtaining Volumetric Images by Means of X-ray Radiation

[3] Новые усилители свста, «Вестник информации», изд. «Советское радио», № 2, стр. 15, 1956.

-END OF ORIGINAL ARTICLE-

Translator’s Note

The present translated article from 1957 appears remarkable as it develops the idea of x-ray computed tomography and discusses its possibilities even prior to the work of Cormack in 1963. It was hardly noticed in literature until today due to limited accessibility and the language barrier. The interested reader should be referred to another article\textsuperscript{3} by Korenblum, Tetelbaum and Tyutin from 1958 suggesting and deriving a scheme for fan-beam CT of a thin slice. A translation of the later is in progress and will be made available soon.

Since the original article does not have an abstract, the conclusion part with an introductory sentence was chosen as abstract for the online record. The figures have been improved (mainly the display of the variables) for a better recognition.

I would like to thank Fabio De Marco for bringing the work to my attention and further discussion and research on original sources. I am grateful to the staff members of the Scientific and Technical Library of Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute for helping to find copies of the original work and the references.

Appendix A

Scans of the original work in Russian language are provided bellow.

\textsuperscript{3}B. I. Korenblum, S. I. Tetelbaum, A. A. Tyutin, About one scheme of tomography, Bulletin of the Institutes of Higher Education - Radiophysics 1, 151-157 (1958)
C. И. ТЕТЕЛЬБАУМ

О МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ ОБЪЕМНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Современная рентгенотехника позволяет получать теневые изображения исследуемых объектов. Теневой характер изображений обусловлен тем, что на флуоресцирующем экране либо рентгенопленке фиксируется интенсивность прошедшего через объект излучения, которая зависит от результирующего поглощения, вызываемого всеми элементами объекта, находящимися на практически прямолинейном пути каждого пучка лучей.

Наблюдаемое в некоторой плоскости пространства изображения распределение $f$ интенсивности излучения зависит от коэффициента поглощения элементов объекта $F(x, y, z, \lambda)$, являющегося функцией связанных с объектом геометрических координат и длины волны $\lambda$, а также от условий опыта.

Объемное изображение исследуемого объекта может быть образовано, если в результате опыта будет определена функция $F$, характеризующая значение локального коэффициента поглощения в каждом элементе трехмерного объекта. Между $f$ и $F$ имеет место некоторая функциональная зависимость

$$f = \Phi(F).$$

(1)

При обычных методах рентгенотехники эта зависимость не обеспечивает единственности решения для функции $F$ и наблюдаемое теневое изображение может быть, вообще говоря, образовано каждым из некоторого множества различных объектов, приводящих к одинаковому результирующему поглощению.

В этой статье на основании общих представлений о возможности компенсации искажений изображений, даваемых оп-
тическими и аналогичными инструментами [1], указывается метод получения при помощи рентгеновского либо иного, достаточно проникающего излучения пространственных изображений объектов. Может быть также получено изображение достаточно тонкого слоя объекта, не зависящее от характеристик прилежащих слоев.

Для этой цели условия опыта выбираются так, чтобы наблюдаемое распределение интенсивности (которое может быть измерено непосредственно либо на предварительно снятых рентгенограммах или флюорограммах) однозначно определяло объект, т. е., чтобы уравнение вида (1) имело единственное решение. В этом случае, применяя обратный оператор

$$F = \Phi (f),$$

находят искомую функцию $F$, определяющую локальный коэффициент поглощения в каждом из элементов трехмерного объекта.

**Интегральное уравнение задачи**

Пусть точечный не направленный источник $S$ (рис. 1), координаты которого $\alpha, \beta, \gamma$ известны, излучает рентгеновское либо иное проникающее излучение со спектральным распределением $\phi_1 (\lambda)$.

![Рис. 1](image)

Ограниченный в трех измерениях изучаемый объект помещен между плоскостями $x=0$ и $x=L$. Интенсивность излучения определяется в параллельной этим плоскостям плоскости наблюдения $\eta_1 \eta_2$.
Будем характеризовать объект локальным коэффициентом поглощения $F(x, y, z, \lambda)$. Доопределим функцию $F$ в области, заключенной между $x=-L$ и $x=L$, положив в ней (но вне объекта) $F=0$.

При неизменной геометрии системы распределение интенсивности излучения с точностью до постоянного множителя будет

$$
\phi_1(\lambda) \exp \left[-\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \eta, \xi, \zeta) \int_0^L F(x, y, z, \lambda) \, dx \right],
$$

где

$$
\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \eta, \xi, \zeta) = \sqrt{1 + \left(\frac{\eta - \beta}{\xi + \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma - \zeta}{\xi + \alpha}\right)^2},
$$

где

$$
y = \beta \left(1 + \frac{x + \alpha}{\xi - \alpha}\right) + \frac{x + \alpha}{\xi + \alpha}; \quad z = \gamma \left(1 + \frac{x + \alpha}{\xi - \alpha}\right) + \frac{x + \alpha}{\xi + \alpha}.
$$

В выражении (3) учтено ослабление излучения, вызываемое поглощением в объекте, ослабление за счет расхождения конуса излучения, а также уменьшение интенсивности, обусловленное наклонным падением лучей на плоскость наблюдения.

Интегральное уравнение (3) не удовлетворяет условию единственности непрерывного решения и функция $F$ не может быть однозначно определена по известной функции $f$. При обычной рентгенотехнике имеет место дополнительное усреднение по спектру, что яркость флуоресцирующего экрана или при фиксированной экспозиции почернение пленки определяется выражением:

$$
B(\eta, \zeta) = \Theta \left[ \int_0^\infty \phi_2(\lambda) f(\eta, \zeta, \lambda) \, d\lambda \right].
$$

В последнем выражении $\phi_2(\lambda)$ и $\Theta$ определяют спектральную чувствительность и функцию почернения рентгенопленки или соответствующие характеристики экрана.

Для получения зависимостей, позволяющих однозначно найти коэффициент поглощения в каждом элементе объекта, будем определять функцию $f$ при непрерывном изменении в некоторых пределах взаимного расположения источника излучения, объекта и плоскости наблюдения. В этом случае соответствующее интегральное уравнение будет удовлетворять условию единственности непрерывного решения и интересующая нас функция $F$ может быть однозначно определена.

Если, например, изменять при исследовании какую-либо из координат источника излучения, получим вместо уравнения (3) интегральное уравнение
где \( \sigma \) соответственно равно \( a, b \) или \( \hat{a} \), удовлетворяющее условию единственности решения.

Удобным способом изменения взаимного расположения может явиться также вращение объекта вокруг неподвижной оси.

**СЛУЧАЙ ВРАЩЕНИЯ ОБЪЕКТА**

Рассмотрим упрощенный случай, соответствующий достаточно удаленному от объекта источнику. Пусть изучаемый объект, сечение которо во взаимно перпендикулярных плоскостях \( \eta_0 z \) и \( x0y \) показаны на рис. 2 штриховкой, облучается равномерным параллельным потоком проникающего излучения, распространяющегося в направлении \( 0 \xi \). Доопределим функцию \( F(x, y, z, \lambda) \) в цилиндре радиуса \( R \) высотой \( H \), включающем объект, положив внутри цилиндра (но вне объекта) \( F = 0 \). Найдем распределение интенсивности излучения в плоскости наблюдения \( \eta_0 z \) при вращении объекта вокруг оси \( oz \) с угловой скоростью \( \frac{d\xi}{dt} \). С точностью до постоянного множителя получаем

\[
f(\eta, z, \tau, \lambda) = \psi_1(\lambda) \exp \left[ -\int \frac{F(x, y, z, \lambda) \, d\xi}{\sqrt{R^2 - \eta^2}} \right],
\]

где

\[x = \xi \cos \tau + \eta \sin \tau; \quad y = -\xi \sin \tau + \eta \cos \tau;\]

\( \tau \)—угол между \( 0 \xi \) и \( ox \), определяющий ракурс объекта.

Интегральное уравнение (6) также удовлетворяет условию единственности непрерывного решения. Если, например, наблюдение ведется в сравнительно узком интервале...
волн вблизи волны \( \lambda_1 \) так, что \( F(x, y, z, \lambda_1) = F_1(x, y, z) \) и соответственно \( f(\eta, z, \tau, \lambda_1) = f_1(\eta, z, \tau) \), то решением уравнения (6) является:

\[
F_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\lambda \to 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\ln f_1(\eta, z, \tau)}{\eta - r \sin(\varphi + \tau)} \right) \eta \, d\eta \, d\tau,
\]

где \( x = r \cos \varphi; y = r \sin \varphi; 0 \leq r < R \).

Операция нахождения функции \( F \) по определяемой из опыта функции \( f \) может выполняться автоматически, при помощи соответствующего счетно-решающего устройства.

Для аппаратурного нахождения функции \( F \) можно воспользоваться решением уравнения (6) в виде

\[
F_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \ln f_1(\eta, z, \tau) \right) \eta - r \sin(\varphi + \tau) \, d\eta \, d\tau,
\]

полученным из (7) предельным переходом.

При использовании (8) следует иметь в виду недопустимость изменения порядка интегрирования. При выводе (8) учитывались естественные ограничения (непрерывность производных до третьей включительно), сопровождающие аппаратурное определение функции \( F \).

Заметим, что принятое с целью упрощения условие параллельности излучения не является обязательным. При относительно близком расположении источника излучения интегральное уравнение, соответствующее случаю вращения объекта, также имеет единственное решение.

При достаточно быстром выполнении операции получения одного объемного «кадра» может быть осуществлено наблюдение движущегося объекта, в котором \( F \) зависит также от времени \( t \).

Следует отметить еще одну принципиальную возможность улучшения дифференциации участков объекта, отличающихся видом зависимости локального коэффициента поглощения от длины волны. Определив \( F(x, y, z) \) например, в трех различных сравнительно узких интервалах волн, и получив соответствующие изображения, можно совместить их, предварительно окрасив в основные цвета. В результате будет получено условное цветное изображение, что может дать, например, в медицине, дополнительные диагностические возможности.

* Приводимое решение получено Б. И. Коренблом.
При необходимости запись функции \( f \) может быть произведена, например, флюорографической съемкой ряда темных изображений для дискретных значений \( \tau = \tau_0 + n\Delta \tau \) \((n = 0, 1, 2, 3 \ldots m)\). Следует иметь в виду, что при уменьшении интервала \( \Delta \tau \) и увеличении \( m \) достигается детальность воспроизведения функции \( F \) возрастает.

Схема установки показана на рис. 3, а. Здесь \( A \) — источник излучения, \( B \) — объект, \( V \) — свинцовый решетчатый фильтр, поглощающий рассеянные лучи, \( F \) — флюоресцирующий экран (при необходимости снижения суммарной дозы облучения, снабженный усилителем света [3]), \( D \) — объектив, \( E \) — кинопленка.

Кинематическая связь между приводом вращения объекта и лентопротяжным механизмом условно показана штрихпунктиром. При исследовании тонкого слоя запись функции \( f(\tau, \tau) \) может быть произведена в виде рентгенографа на равномерно движущейся пленке при равномерном вращении объекта. Соответствующая схема приведена на рис. 2, б. Двойной штриховкой показано сечение свинцовых щелевидных коллиматоров.

**Выводы**

В статье показана принципиальная возможность определения при помощи проникающего излучения локального коэффициента поглощения в каждом элементе трехмерного объекта. Задача формулируется в виде интегрального уравнения, а условия эксперимента выбираются так, чтобы это уравнение имело единственное решение. Указывается возможность получения объемных рентгеновских изображений и рентгенограмм тонких слоев, а также использования условного цветового контрастирования.

Рассматриваемый метод представляет перспективный интерес для рентген- и гамма-дефектоскопии, а также для медицинской диагностики.
ЛITERATURA

1. Тетельбаум С. И., О задаче улучшения изображений, получаемых при помощи оптических и аналогичных инструментов, Известия Киевского ордена Ленина политехнического института, т. XX1, стр. 222, 1956.

2. Роль стереоскопии в трехмерных радиолокационных индикаторах, «Вопросы радиолокационной техники», № 2, стр. 44, 1955.

3. Новые усилители света, «Вестник информации», изд. «Советское радио», № 2, стр. 15, 1956.