UDC 621.372

MUTUAL COUPLING COEFFICIENTS OF ROTATING RECTANGULAR DIELECTRIC RESONATORS IN CUT-OFF RECTANGULAR WAVEGUIDE

Alexander A. Trubin
Institute of Telecommunication Systems
Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

Background. A further increase in the speed of information transfer is determined by more stringent requirements for the elements of communication devices. One of the most important components of such devices is various filters, which are often made on the basis of dielectric resonators. Calculation of the parameters of multi-section filters is impossible without further development of the theory of their design. The development of filter theory is based on electrodynamic modelling, which involves calculating the coupling coefficients of dielectric resonators in various transmission lines.

Objective. The aim of the research is to calculate and study the coupling coefficients of rectangular dielectric resonators with a rectangular metal waveguide when their axes rotate. Investigation of new effects to improve the performance of filters and other devices based on them.

Methods. Methods of technical electrodynamics are used to calculate and analyse the coupling coefficients. The end result is to obtain new analytical formulas for new structures with rectangular dielectric resonators, which make it possible to analyse and calculate their coupling coefficients.

Results. New analytical expressions are found for the coupling coefficients of dielectric resonators with the rotation of their axes in a rectangular waveguide.

Conclusions. The theory of designing filters based on new structures of dielectric resonators with rotation of their axes in metal waveguides has been expanded. New analytical relationships and new patterns of change in the coupling coefficients are found.

Keywords: dielectric filter; rectangular dielectric resonator; rotation; coupling coefficients.

Introduction

Multi-section band-pass and band-stop filters based on dielectric resonators (DR) of different shapes are used in various devices of telecommunication systems [1-8]. Further improvement of filter characteristics can be achieved by applying less traditional structures, such as dielectric resonators with rotation of their axes relative to each other and the transmission line [1, 2]. Theoretical analysis of the characteristics of such filters, it is required to calculate the mutual coupling coefficients of the DR located at an arbitrary angle with respect to the waveguides.

Statement of the problem

The purpose of this article is to calculation and study mutual coupling coefficients of the rectangular DRs in a rectangular metal cut-off waveguide.

Calculation of fields during rotation of dielectric resonators in a waveguide

The internal field \((\mathbf{E}, \mathbf{H})\) of a rectangular dielectric resonator with magnetic type oscillations \(H_{nml}\) in the local coordinate system \((x', y', z')\) (Fig.1) with good accuracy can be represented as:

\[
e_x = -\frac{h_{i\omega \mu_0}}{k_l^2 - \beta_z^2} \beta_x \left( \cos \beta_{x', x'} \left[ \cos \beta_{y', y'} \right] \sin \beta_{z', z'} - \sin \beta_{x', x'} \left[ \cos \beta_{y', y'} \right] \cos \beta_{z', z'} \right),
\]

\[
e_y = \frac{h_{i\omega \mu_0}}{k_l^2 - \beta_z^2} \beta_y \left( \cos \beta_{x', x'} \left[ \sin \beta_{y', y'} \right] \cos \beta_{z', z'} - \sin \beta_{x', x'} \left[ \sin \beta_{y', y'} \right] \sin \beta_{z', z'} \right),
\]

Fig. 1. Rectangular dielectric resonator in the local coordinate system \((x', y', z')\).
where for rectangular DR

$$h_x = \frac{h_1}{k_1^2 - \beta_x^2} \beta_x \beta_z \left( \begin{array}{c} \cos \beta_x x' \\sin \beta_x y' \\sin \beta_z z' \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \sin \beta_x x' \\cos \beta_x y' \\cos \beta_z z' \end{array} \right),$$

$$h_y = \frac{h_1}{k_1^2 - \beta_y^2} \beta_y \beta_z \left( \begin{array}{c} \cos \beta_x x' \\cos \beta_y y' \\sin \beta_z z' \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} -\sin \beta_x x' \\cos \beta_y y' \\cos \beta_z z' \end{array} \right),$$

$$h_z = h_1 \left( \begin{array}{c} \sin \beta_x x' \\sin \beta_y y' \\sin \beta_z z' \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \cos \beta_x x' \\cos \beta_y y' \\cos \beta_z z' \end{array} \right).$$

Where \((\beta_x, \beta_y, \beta_z)\) - are the wave numbers;
\(k_0 = \omega_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}, \quad k_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}; \quad h_1 - is the amplitude; \omega - is the resonant frequency; \mu_0 - is the magnetic permeability; \varepsilon_0; \quad \varepsilon_1 - is the dielectric permittivity of the external space and resonator, respectively.

An analytical expressions for the coupling coefficients obtained from [10] for cut-off waveguide

$$k_{12} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( c_{1n}^* c_{2n}^* \right) \left( c_{1n} c_{2n} \right) e^{-t2z-\pi].}$$

Here \(W\) - energy stored in the dielectric of the resonator; \(\Gamma\) - is the guided wavelength; \(t\) - is the multi-index, defining non-propagating line wave type; \(z_n - longitudinal coordinate of the n-th DR centre (n = 1, 2); \)\(*\) - is the complex conjugate symbol.

We need to calculate the expansion coefficients \((c_{1n}^* c_{2n}^* )_0\) of the field of natural oscillations of the DR over the waveguide field in the resonator centre coordinate system.

For a rectangular resonator, it is more convenient to use representation for expansion coefficients:

$$c_{1n} = i/2 \varepsilon_1 (E_{1x})_n (E_{1y})_n (E_{1z})_n dV.$$  \hspace{1cm} (3)

Here \(E_{1n}\) - electric field of the t-th eigen wave of a waveguide; \(c^*\) - is the field (1); \(V\) - is the resonator volume; \(n = 1, 2, \ldots\)

For simplicity, we will rewrite (2), (3) in the waveguide coordinate system \((x, y, z)\) (Fig. 2 - a) in a more convenient form:

$$k_{12} = k_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_1^0(\pi/\Gamma)(f_1^0(\pm \pi)) e^{-t2z-\pi].}$$

where for rectangular DR
numbers of a rectangular cut-off waveguide with a cross section \(a \times b\) (Fig. 2, a);

\[
\begin{aligned}
E_{x0} &= i \chi_{x0} \frac{w^0_{n a}}{h^0_{m b}}; \\
E_{y0} &= -i \chi_{y0} \frac{w^0_{n b}}{h^0_{m a}} \text{ for H-waves;} \\
E_{x0} &= \chi_{x0} \frac{w^0_{m b}}{h^0_{n a}}; \\
E_{y0} &= \chi_{y0} \frac{w^0_{n b}}{h^0_{m a}} \text{ for E-waves [10];}
\end{aligned}
\]

\[
\begin{aligned}
h^0_{ma} &= \frac{2 \left[ \frac{\chi}{w_{0, k, ab}} \left( 1 + \delta_{m,0} + \delta_{n,0} \right) \right]}{1/2} \left( \frac{1}{2} \right)^{1/2}; \\
e^0_{ma} &= \frac{2 \left[ \frac{\chi}{k_{y, ab}} \left( 1 + \delta_{m,0} + \delta_{n,0} \right) \right]}{1/2} \left( \frac{1}{2} \right)^{1/2};
\end{aligned}
\]

\[w_{0}^{n} = \omega \mu_{0} / \Gamma; \quad \chi = \left[ \chi_{x x}^{2} + \chi_{x y}^{2} \right]^{1/2}; \quad (x_{n}, y_{n}, z_{n}) - \text{is the coordinates of the centre of the resonator in the waveguide}; \quad \beta_{n} - \text{is the angle between the } z' - \text{axes of the local coordinate system of the resonator and the } z - \text{axes waveguide (Fig. 2, a)}; \quad a_{0} \times b_{0} \times L - \text{dimensions of the Rectangular DR (Fig. 1)}; \]

\[
\begin{aligned}
\omega_{n} (\xi) &= \frac{1}{p_{n}^{2} - (q_{n} \xi)^{2}}, \\
\left\{ \begin{array}{l}
- i p_{n} \cos p_{n} \sin (q_{n} \xi) - q_{n} \xi \sin p_{n} \cos (q_{n} \xi) \\
p_{n} \sin p_{n} \cos (q_{n} \xi) - q_{n} \xi \cos p_{n} \sin (q_{n} \xi)
\end{array} \right\};
\end{aligned}
\]

\[
\begin{aligned}
\omega_{n} (\xi) &= \frac{1}{p_{n}^{2} - (q_{n} \xi)^{2}}, \\
\left\{ \begin{array}{l}
q_{n} \xi \sin p_{n} \cos (q_{n} \xi) - q_{n} \xi \cos p_{n} \sin (q_{n} \xi) \\
q_{n} \xi \cos p_{n} \sin (q_{n} \xi) - q_{n} \xi \cos p_{n} \sin (q_{n} \xi)
\end{array} \right\};
\end{aligned}
\]

for \(v = (x, y, z)\).

Fig. 2. Two rectangular dielectric resonators rotating relatively the x axis (a) in the rectangular waveguide. Variation of the mutual coupling coefficients at different longitudinal distances \(\Delta z\) between the centres dielectric resonators in the waveguide a \(\times b = 20 \times 15 \text{mm}^2\) for \(e_{r} = 36; \quad a_{0} / b_{0} = 1; \quad L / a_{0} = 0.4; \quad x_{1} = x_{2} = a / 2; \quad y_{1} = y_{2} = b / 2; \quad 1 - \beta_{1} = \beta_{2} = 0; \quad 2 - \beta_{1} = 0; \quad \beta_{2} = \pi\) (b). Mutual coupling coefficient on the coordinates \((x_{1}, x_{2})\) for \(\beta_{1} = \beta_{2} = 0; \quad y_{1} = y_{2} = b / 2; \quad \Delta z = |z_{2} - z_{1}| = 10 \text{mm}\) (c). Dependence of the mutual coupling coefficient on the angle of rotation of the second resonator (d): \(1 - \beta_{1} = 0; \quad 2 - \beta_{1} = \pi / 4; \quad 3 - \beta_{1} = \pi / 2\). Dependence of the coupling coefficient on the angle of rotation of the resonators for \(\beta_{1} = \beta_{2}\) (e): \(1 - x_{1} = x_{2} = a / 4; \quad 2 - x_{1} = a / 4; \quad x_{2} = a / 2; \quad 3 - x_{1} = a / 4; \quad x_{2} = 3a / 4\). The coupling coefficient on the coordinate \(x_{2}\) for \(y_{1} = y_{2} = b / 2; \quad \Delta z = 10 \text{mm}\) (f) and \(\beta_{1} = \beta_{2} = 1.175; \quad 1 - x_{1} = a / 4; \quad 2 - x_{1} = a / 2; \quad 3 - x_{1} = 3a / 4\).
Rotation of the dielectric resonator relatively y-axis of the waveguide

The coupling coefficient of the dielectric resonators rotated relatively the y-axis determines by the functions:

\[ f^n_y(\mp i\Gamma) = \frac{e^{i\alpha_n} \cos \alpha_n}{\mp i \sin \alpha_n} \cdot \{ E_{x0}^* \beta y \cos \alpha_n \cdot \}
\]

where \( \alpha_n \) is the angle between \( z'\) - axes of the local coordinate system of the resonator (Fig. 1) and \( z \)-axes of the waveguide (Fig. 3, a) (\( n = 1, 2 \)).

Rotations of the dielectric resonator relatively z-axis of the waveguide

In the case of rotation of the dielectric resonator relatively z-axis at the initial position of the resonator axis \( z' \) parallel to the waveguide axis (Fig. 4, a), the coupling coefficient defined by functions:

\[ f^n_z(\mp i\Gamma) = \frac{e^{i\alpha_n} \cos \alpha_n}{\mp i \sin \alpha_n} \cdot \{ E_{z0}^* \beta y \cos \alpha_n \cdot \}
\]

Here \( \alpha_n \) can be defined as the angle between the \( y \)-axis of the waveguide (Fig. 4, a) and the \( y' \)-axis (Fig. 1) of the \( n \)-th resonator.
Fig. 4. Two rectangular dielectric resonators rotating relatively z-axis (a) of the waveguide. Variation of the mutual coupling coefficients at different longitudinal distances between the centres dielectric resonators for $a \times b = 20 \times 15 \text{mm}^2$; $\varepsilon_r = 36$; $a_{0} / b_{0} = 1$; $L / a_{0} = 0,4$; $x_1 = x_2 = a / 2$; $y_1 = y_2 = b / 2$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ and $\alpha_i = 0$, $\alpha_i = \pi / 2$ (b). Dependence of the mutual coupling coefficient on the angle of rotation of the second resonator for $\alpha_i = 0$; $\Delta z = 10 \text{mm}$ (c, d).

Mutual coupling coefficient on the coordinates $(x_1, x_2)$: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \pi / 4$; $y_1 = y_2 = b / 2$ (d).

In the case of rotation of the dielectric resonator relative z-axis at the initial position of the resonator y'-axis parallel to the waveguide y-axis (Fig. 5, a):

$$
\mathbf{f}_i^a(\mp i \Gamma) = i \left[ -E_{x0}^* \beta_{x} \sin \alpha_{x} \sigma_{x} (\mp iy) \cdot 
\omega_{i}(\xi_{0x} \cos \alpha_{x} - \eta_{0x} \sin \alpha_{x})\alpha_{i}(\xi_{0x} \sin \alpha_{x} + \eta_{0x} \cos \alpha_{x})\sin(\chi_{x} x_{n} + \chi_{y} y_{n}) - 
- \omega_{i}(\xi_{0x} \cos \alpha_{x} + \eta_{0x} \sin \alpha_{x})\alpha_{i}(\xi_{0x} \sin \alpha_{x} - \eta_{0x} \cos \alpha_{x})\sin(\chi_{x} x_{n} - \chi_{y} y_{n}) \right] - 

- \Im \left[ \mathbf{E}_{y0}^* \beta_{y} \cos \alpha_{y} \sigma_{y} (\mp iy) \cdot 
\omega_{i}(\xi_{0y} \cos \alpha_{y} - \eta_{0y} \sin \alpha_{y})\alpha_{i}(\xi_{0y} \sin \alpha_{y} + \eta_{0y} \cos \alpha_{y})\sin(\chi_{x} x_{n} + \chi_{y} y_{n}) + 
+ \omega_{i}(\xi_{0y} \cos \alpha_{y} + \eta_{0y} \sin \alpha_{y})\alpha_{i}(\xi_{0y} \sin \alpha_{y} - \eta_{0y} \cos \alpha_{y})\sin(\chi_{x} x_{n} - \chi_{y} y_{n}) \right] 
\right)

(8)

Calculation and analysis of mutual coupling coefficients

Relations (4–8) were used for calculations mutual coupling coefficient dependences.

In Fig. 2-5, b depending on the coupling coefficients on the longitudinal distance between dielectric resonators with $\varepsilon_r = 36$; $a_{0} = b_{0}$; $L / a_{0} = 0,4$. The cross section of the waveguide was $a \times b = 20 \times 15 \text{mm}$. Frequency of the fundamental magnetic oscillation of the resonator
A. Trubin. Mutual Coupling Coefficients of Rotating Rectangular Dielectric Resonators in Cut-off Rectangular Waveguide

\[ H_{111} \text{ (for } h_z = h_1 \cos \beta_x x' \cos \beta_y y' \cos \beta_z z' \text{ in (1)) and } f = 7 \text{ GHz.} \]

As follows from the indicated dependencies, the coupling coefficients can take both positive and negative values. This can be due to physical and mathematical reasons. If co-directional \( z' \)-axes of the resonators with \( H_{111} \) oscillations lie on the \( z \)-axis of the waveguide and \( \Delta z > L \), the mutual coupling coefficient is negative. If the co-directed \( z' \)-axes are parallel and the resonators are coupled along the side wall, the coupling coefficients are usually positive for \( H_{111} \) oscillations. If there is continuous rotation between these two positions of the DR, it leads to a change in the sign of the coupling (see fig. 2, 3, b - e). However, the rotation of one of the resonators at an angle \( \pi \) can also lead to a change in the sign of the coupling. This purely mathematically compensates for the change in the direction of the natural oscillation field of one of the resonators (see, for example, fig. 2, b or fig. 5, b).

As can be seen from the results of calculations, in spite of the fact that the coupling functions are complex (see (4) - (8)), all coupling coefficients of the resonators in the rectangular cut-off waveguide are purely real (see fig. 3, 4, c).

For the dipole type of natural oscillations \( H_{111} \), the field distribution is close to azimuthally uniform, therefore, the rotation of the resonators about the \( z' \) (fig. 1) axis does not change the value of the coupling, or does not change significantly (see fig. 4, c).

A more nontrivial case takes place at the rotation of both resonators relatively the \( x \)-axis (fig. 2, e), there is an angle at which the coupling coefficient weakly depends on the transverse coordinates of their centres. For the considered cross-section of the cut-off waveguide with tilt of the resonators with \( \beta_1 = \beta_2 = 1.175 \), the indicated phenomenon is demonstrated by the curves in Fig. 2, f.

As expected, when the transverse coordinates are varied, the maximum coupling is achieved at the walls of the waveguide with the longitudinal arrangement of the resonator axes (Fig. 2, 4, d), and with the transverse arrangement of the axes, this maximum lies near the waveguide axis (Fig. 5, c).

Conclusions

In the paper, new analytical expressions are obtained for the mutual coupling coefficients for rectangular dielectric resonators in the rectangular waveguide, when the resonators are rotated relative to one of the waveguide axis.

The dependences of the coupling coefficients on the angles of rotation of the axes of dielectric resonators are studied.

It is shown that the change in the sign of the coupling can be due to both the physical nature and the spatial change in the direction of the field of natural oscillations of the resonators.

In the case of rotation about the \( x \) axis, the existence of an angle is shown at which the coupling coefficients weakly depend on the second resonator coordinate in the waveguide symmetry plane \( y = b / 2 \).

With the longitudinal arrangement of the axes of resonators with magnetic types of oscillations \( H_{111} \) relative to the axis of the waveguide, a weak dependence of the coupling on the angles of rotation has been established.

The obtained analytical relations can be used to develop mathematical models for a wide class of elements of telecommunication systems, such as filters, channel dividers, multiplexers, to name a few.

References

1. Fesenko V.I., Kupriianov A.S., Sherbinin A., Trubin A.A., Tuz V.R.. All-dielectric Vogel metasurface antennas with bidirectional radiation pattern, Journal of Optics, UK, 22, 035104, 2020, pp. 1-8.
2. Trubin A.A. Adaptive planar antennas on lattices of rotating Dielectric Resonators. 14 Int. Scientific Conf. Modern Challenges in Telecommunications. Kiev, 2020, pp. 89-91.
3. Shi T., Wang Y., Deng Z.-L., Ye X., Dai Z., Cao Y., Guan B.-O., Xiao S., Li X. All-Dielectric Kissing-Dimer Metagratings for Asymmetric High Diffraction, Adv. Optical Mater. WILEY-VCH Verlag, 2019, pp. 1901389 - 1901389.
4. Wang X., Nie Z., Liang Y., Wang J., Li T., Jia B. Recent advances on optical vortex generation, Review article. Nanophotonics 2018; 7(9): pp. 1533–1556
5. Sallehuddin N.F., Jamaluddin M.H., Kamarudin M.R., Dahri M.H., Anuar S.U.T. Dielectric Resonator Reflectarray Antenna Unit Cells for 5G Applications // International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE) 2018, Vol. 8, No. 1, February pp. 101 - 109.
6. Pidgurska T.V. Trubin A.A. Dual-bandpass filter built on rectangular dielectric resonators, Radioelectronics and Communications Systems, 2015. Vol. 58. pp.174–180.
Трубін О.О.

Коефіцієнти зв’язку обертових прямокутних діелектричних резонаторів з позамежним прямокутним хвилеводом при обертанні їх осей

Проблематика. Підвищення швидкості передачі інформації визначається жорсткими вимогами, що передбачаються до елементної бази приймально-передавальних пристроїв. Одної з важливих складових таких пристроїв є смугові фільтри, які часто використовуються на діелектричних резонаторах. Розрахунок параметрів багатоголокових смугових фільтрів неможливо без подальшого розвитку теорії їх проєктування. Розвиток теорії фільтрів базується на електродинамічному моделюванні які грунтується на попередніх розрахунках коефіцієнтів взаємного зв’язку діелектричних резонаторів в різноманітних лініях передачі.

Мета дослідження. Метою дослідження є розрахунок та дослідження коефіцієнтів взаємного зв’язку прямокутних діелектричних резонаторів які розташовані у прямокутному металевому хвилеводі при застосуванні нових структур з обертанням їх осей. Дослідження нових ефектів, що дозволяють покращувати характеристики розсіювання смугових фільтрів та інших пристроїв на їх основі.

Методика реалізації. Для розрахунку та аналізу коефіцієнтів взаємного зв’язку використовуються методи технічної електродинамики. Кінцевим результатом є отримання нових аналітичних формул для нових структур з прямоугольними діелектричними резонаторами, що дозволяють аналізувати і розраховувати їх коефіцієнти взаємного зв’язку.

Результати дослідження. Знайдено нові аналітичні вирази для коефіцієнтів взаємного зв’язку діелектричних резонаторів з обертанням їх осей в прямокутному позамежному хвилеводі.

Висновки. Розширене теорія конструювання фільтрів на нових структурах діелектричних резонаторів з обертанням їх осей в металевих хвилеводах. Знайдено нові аналітичні співвідношення та досліджені нові закономірності зміни коефіцієнтів зв’язку.

Ключові слова: діелектричний фільтр; прямокутний діелектричний резонатор; обертання; коефіцієнти взаємного зв’язку.

Трубин А.А.

Коефіцієнти взаємного діелектричного зв’язку прямокутних діелектричних резонаторів при вращенні їх осей

Проблематика. Дальньосередня вибірка ВТР або перенос даних опанована більш жорсткими обставинами, що передбачаються до елементної бази приймально-передавальних пристроїв. Одна з важливих складових таких пристроїв є смугові фільтри, які часто використовуються на діелектричних резонаторах. Розрахунок параметрів багатоголокових смугових фільтрів неможливо без подальшого розвитку теорії їх проєктування. Розвиток теорії фільтрів базується на електродинамічному моделюванні, яке використовує зміну параметрів зв’язку.

Мета дослідження. Метою дослідження є розрахунок та дослідження коефіцієнтів взаємного зв’язку прямокутних діелектричних резонаторів при обертанні їх осей.

Методика реалізації. Для розрахунку та аналізу коефіцієнтів взаємного зв’язку використовуються методи технічної електродинамики. Кінцевим результатом є отримання нових аналітичних формул для нових структур з прямоугольними діелектричними резонаторами, що дозволяють аналізувати і розраховувати їх коефіцієнти взаємного зв’язку.

Результати дослідження. Знайдено нові аналітичні вирази для коефіцієнтів взаємного зв’язку діелектричних резонаторів при обертанні.

Висновки. Розширене теорія конструювання фільтрів на нових структурах діелектричних резонаторів при обертанні їх осей в металевих хвилеводах. Знайдено нові аналітичні співвідношення та досліджені нові закономірності зміни коефіцієнтів зв’язку.

Ключові слова: діелектричний фільтр; прямокутний діелектричний резонатор; обертання; коефіцієнти взаємного зв’язку.