On fibering compact manifold over the circle

Ameth Ndiaye

Keywords: foliation, fibering, Lie group, manifold, compact.

Résumé
In this paper, we show that any compact manifold that carries a $SL(n, \mathbb{R})$-foliation is fibered on the circle $S^1$.

1 Introduction

Definition 1.1. A codimension $n$ foliation $\mathcal{F}$ on a $(n + m)$-manifold $M$ is given by an open cover $\{U_i\}_{i \in I}$ and submersions $f_i : U_i \to T$ over an $n$-dimensional manifold $T$ and, for $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, a diffeomorphism $\gamma_{ij} : f_i(U_i \cap U_j) \to f_j(U_i \cap U_j)$ such that $f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$.

We say that $\{U_i, f_i, T, \gamma_{ij}\}$ is a foliated cocycle defining $\mathcal{F}$.

A transverse structure to $\mathcal{F}$ is a geometric structure on $T$ invariant by the local diffeomorphisms $\gamma_{ij}$. We say that $\mathcal{F}$ is a Lie $G$-foliation, if $T$ is a Lie group $G$ and $\gamma_{ij}$ are restrictions of left translations on $G$. Such foliation can also be defined by a 1-form $\omega$ on $M$ with values in the Lie algebra $\mathfrak{g}$ such that:

i) $\omega : T_x M \to \mathfrak{g}$ is surjective for every $x \in M$,

ii) $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$.

If $\mathfrak{g}$ is Abelian, $\omega$ is given by $n$ linearly independent closed scalar 1-forms $\omega_1, ... \omega_n$.

In the general case, the structure of a Lie foliation on a compact manifold, is given by the following theorem due to E. Fédida [2]:

Let $\mathcal{F}$ be a Lie $G$-foliation on a compact manifold $M$. Let $\widetilde{M}$ be the universal covering of $M$ and $\widetilde{\mathcal{F}}$ the lift of $\mathcal{F}$ to $\widetilde{M}$. Then there exist a homomorphism $h : \pi_1(M) \to G$ and a locally trivial fibration $D : \widetilde{M} \to G$ whose fibres are the leaves of $\widetilde{\mathcal{F}}$ and such that, for every $\gamma \in \pi_1(M)$, the following diagram is commutative:

where the first line denotes the deck transformation of $\gamma \in \pi_1(M)$ on $\widetilde{M}$.

The group $\Gamma = h(\pi_1(M))$ (which is a subgroup of $G$) is called the holonomy group of $\mathcal{F}$ although the holonomy of each leaf is trivial. The fibration $D : \widetilde{M} \to G$ is called the developing map of $\mathcal{F}$.

1. Université Cheikh Anta Diop, Dakar/ Département de Mathématiques(FASTEF)
Email: ameth1.ndiaye@ucad.edu.sn
2 Lie-foliation with transverse group $SL(n, \mathbb{R})$

In the first we want to decompose the group $SL(n, \mathbb{R})$ such that the group $GA$ is one of the factor.

Let us compute an explicite example. Let $GA$ be the Lie group of affine transformations $x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b \in \mathbb{R}$, where $b \in \mathbb{R}$ and $a \in ]0; +\infty[$. It can be embedded in the group $SL(2, \mathbb{R})$ as follows :

$$
\left( x \mapsto ax + b \middle| a > 0 \right) \in GA \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})
$$

There exist a manifold $M$ equipped with a Lie $SL(2, \mathbb{R})$-foliation $F$ with $GA$ as the closure of its holonomy group. Then, the basic cohomology of $F$ is the cohomology of differential forms on $SL(2, \mathbb{R})$ invariant by $GA$. The quotient $SL(2, \mathbb{R})/GA$ is diffeomorphic to the circle $S^1$.

**Example 2.1.** Let $F_o$ the Lie $GA$-foliation on a compact manifold $M_o$. We suppose that $F_o$ can’t be obtain by inverse image of a homogenous foliation. The projection $p : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow S^1$ have a section given by the decomposition $SL(2, \mathbb{R}) \cong GA \times S^1$. Let $D_o : \tilde{V}_o \rightarrow GA$ the the developing map of $F_o$.

The map $D : \tilde{V}_o \times S^1 \rightarrow SL(2, \mathbb{R}), (\tilde{x}, y) \mapsto D_o \tilde{x}.\sigma(y)$ is local trivial fibration, these fibers define a Lie $SL(2, \mathbb{R})$-foliation on $\tilde{V}_o \times S^1$ and induce a Lie $SL(2, \mathbb{R})$-foliation $F$ on the manifold $V = \tilde{V}_o \times S^1$ which is not conjugate to a homogenous foliation.

**Theorem 2.2 (Tischler).** If there exists on a compact manifold $M$ a closed differential form without singularities, then $M$ is fibered on the circle.

**Proposition 2.3 (H.Dathe).** A compact manifold that carry a Lie $SL(2, \mathbb{R})$-foliation is fiber on the circle $S^1$.

Our aim is to generalize this proposition to Lie $SL(n, \mathbb{R})$-foliation. Before that we have

**Proposition 2.4.** We have the decomposition $SL(n, \mathbb{R}) \cong T^{n-1} \times G$ where $T^{n-1}$ is the maximal tore of $SL(n, \mathbb{R})$ identify by the subgroup of diagonal matrices. And $G$ is Lie group such that $\text{Lie}(G) = \bigoplus_{i \neq j} < E_{ij} >$ and $\text{dim}G = n^2 - n$. Moreover we have :

$$
[E_{ij}, E_{kl}] = 0 \text{ if } i \neq l \text{ and } j \neq k
$$

$$
[E_{ij}, E_{ji}] = E_{il} \text{ if } i \neq l
$$

$$
[E_{ij}, E_{ki}] = -E_{kj} \text{ if } k \neq j
$$

2
\[ [E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj} \]

\textbf{Démonstration.} Laissez \( SL(n, \mathbb{R}) \) l'ensemble des matrices spéciales du groupe linéaire réel et \( T \) le tore maximal de \( SL(n, \mathbb{R}) \) identifié avec le sous-groupe des matrices diagonales. Nous denotons par \( X(T) \) le groupe des morphismes \( T \rightarrow \mathbb{R}^\times \).

\( T \) agit sur l'algèbre de Lie \( G \) de \( SL(n, \mathbb{R}) \) par conjugaison et nous avons
\[ G = \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \lambda E_{ij}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \]

où \( \mathcal{H} \) est le sous-ensemble de matrices diagonales de trace nulle.

En utilisant ce découpage, nous pouvons alors décomposer \( SL(n, \mathbb{R}) \) \( \cong T \times G \) de telle sorte que \( \text{Lie}(G) = \bigoplus_{i \neq j} < E_{ij} > \), \( E_{ij} \) étant la matrice \( n \times n \) où le coefficient de la ligne \( i \) et de la colonne \( j \) est égal à 1 et les autres coefficients sont nuls.

\( Y = (a_{ij}), i, j = 1, \ldots, n \in \mathcal{H}, \) donc nous avons
\[ \sum_{i}^{n} a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{11} = -\sum_{i \neq 1} a_{ii} \]

alors
\[ Y = \sum_{i \neq 1} a_{ii} Y_i \]

où \( Y_i = (b_{kl}) \) est la matrice avec \( b_{11} = -1, b_{kk} = 1, k \neq 1 \) et \( b_{kl} = 0 \) pour \( k \neq l \).

Nous pouvons facilement noter que les \( (Y_i), i = 2, \ldots, n \) sont également linéairement indépendants, donc \( \mathcal{H} = \langle Y_i, i = 2, \ldots, n \rangle \) et alors \( \dim \mathcal{H} = n - 1 \). Ceci implique \( \dim T = n - 1 \), donc \( \dim G = (n^2 - 1) - (n - 1) = n^2 - n \).

Par une simple calcul de la matrice produit, nous avons la valeur du bracket de Lie \( [E_{ij}, E_{kl}] \), ce qui termine la démonstration.

\textbf{Remarque 2.5.} La group \( G \) de la proposition précédente peut être identifié avec le groupe \( SO(n) \times SO(n) \) et le tore maximal \( T \) est isomorphe à \( \mathbb{R} \frac{n(n+1)}{2} - 1 / SO(n) \) et alors nous avons
\[ SL(n, \mathbb{R}) \cong SO(n) \times \mathbb{R} \frac{n(n+1)}{2} - 1 \]

\textbf{Proposition 2.6.} Soit \( F \) une feuilletage de Lie \( G \)-foliation sur une variété compacte \( M \), avec \( G = G_1 \times G_2 \). Il existe un feuilletage de Lie \( G_i \)-foliation \( F_i \) sur \( M \) induit par la feuilletage \( F \).

\textbf{Démonstration.} Soient \( G_1 \) et \( G_2 \) deux groupes de Lie et \( F \) un feuilletage de Lie \( G \)-foliation sur une variété compacte \( M \), où \( G = G_1 \times G_2 \).

Si \( D \) est le développement de \( F \) sur la variété universelle \( \tilde{M} \) de \( M \), alors le simple feuilletage défini par \( p_i \circ D \) (où \( p_i, i = 1, 2 \) est la projection de \( G \) sur \( G_i, i = 1, 2 \)), passant en quotient et induit une feuilletage \( F_i \) sur \( M \).

\textbf{Théorème 2.7.} Un variété compacte qui porte une feuilletage de Lie \( SL(n, \mathbb{R}) \)-foliation fibre sur l' cercle \( S^1 \).
Démonstration. Let $M$ be a compact manifold with a Lie $SL(n, \mathbb{R})$-foliation. We have also

$$SL(n, \mathbb{R}) \cong SO(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2} - 1}$$

$$SL(n, \mathbb{R}) \cong SO(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2} - 3} \times \mathbb{R}^2$$

Now we take $G = SL(n, \mathbb{R}), G_1 = SO(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2} - 3}$ and $G_2 = \mathbb{R}^2$
so using the proposition, the Lie $SL(n, \mathbb{R})$-foliation induces a Lie $\mathbb{R}^2$-foliation on $M$. Since $\mathbb{R}^2$ is abelian the structures equations of the Lie $\mathbb{R}^2$-foliation are closed 1-forms on $M$, then using the Tischler theorem, $M$ is a fibration over the circle. 

Références

[1] D. Tischler, On fibering certain manifold over the circle, Topology 9 (1970), 153-154.
[2] E. Fedida, Feuilletages du plan, feuilletage de Lie, thèse université Louis Pasteur, Strasbourg (1973).
[3] E. Fedida, Sur les feuilletages de Lie, C. R. Acad. Sci. Paris 272 (1971)999 1001
[4] A. El Kacimi Alaoui, G. Guasp, M. Nicolau, On deformations of transversely homogeneous foliations, Topology 40 (2001), 1363-1393.
[5] H. Dathe, Sur l’existence des feuilletages de Lie, Thèse de troisième cycle, Université Cheikh Anta Diop, Dakar (Sénégal) (1999).
[6] S. Riche, Sur les représentations des groupes algébriques et des groupes quantiques