Percolation of three fluids on a honeycomb lattice

I. V. Novikov

Abstract

In this paper, we consider a generalization of percolation: percolation of three related fluids on a honeycomb lattice. K. Izyurov and A. Magazinov proved that percolations of distinct fluids between opposite sides on a fixed hexagon become mutually independent as the lattice step tends to 0. This paper exposes this proof in details (with minor simplifications) for nonspecialists. In addition, we state a few related conjectures based on numerical experiments.

Keywords — Fourier-Walsh transform, Potts model, percolation, honeycomb lattice, Boolean functions.

Contents

1 Introduction 1
2 Main theorem 2
  2.1 Percolation between sides ........................................ 2
  2.2 Percolation from the center ...................................... 3
  2.3 Example .......................................................... 3
  2.4 Kesten’s Theorem ................................................... 4
3 The Fourier-Walsh expansion 4
  3.1 Definition .......................................................... 4
  3.2 A formula for the Fourier-Walsh coefficients ...................... 5
  3.3 Variance ........................................................... 6
  3.4 Increasing Boolean functions ...................................... 6
4 Proof of the theorem 8
  4.1 Restatement in terms of the Fourier-Walsh coefficients ........... 8
  4.2 Pivotal colorings ................................................... 10
  4.3 Conclusion of the proof ............................................ 10
  4.4 Arguments in favor of Conjecture 3 .............................. 12
5 Numerical experiments 12
6 Acknowledgements 15

1 Introduction

In this paper, we consider a generalization of percolation: percolation of three related fluids on a honeycomb lattice. We prove (see Theorem 1) that percolations of distinct fluids between opposite sides of a fixed hexagon become mutually independent as the lattice step tends to 0. This was a conjecture by M. Skopenkov proved independently by K. Izyurov and A. Magazinov approximately at the same time (private communication). The proof is based on the Fourier-Walsh expansion...
and Kesten’s theorem. This paper exposes this proof in details (with minor simplifications) for nonspecialists. We also state a few new related conjectures based on numerical experiments.

The paper is organized as follows. In §2, we introduce key definitions, and also state Main Theorem 1 and several conjectures. In §3, we introduce the Fourier-Walsh expansion. In §4, we expose the proof of Theorem 1 based on the Fourier-Walsh expansion. In §5, we describe results of numerical experiments related to conjectures from §2.

2 Main theorem

For any \( n > 1 \) consider a honeycomb lattice of step \( \frac{1}{n} \). Let \( P \) be a regular hexagon with the side 1 centered at the center of some cell \( O \). Denote by \( M_n \) the set of all the cells contained in \( P \). Consider the probability space \( \Omega \) consisting of all the colorings of the cells of the set \( M_n \) into 4 colors, denoted by 0, 1, 2, 3, with the measure \( P(B) = |B|/4^{|M_n|} \) for any \( B \subset \Omega \). The probability space \( \Omega \) is called the four-state Potts model at infinite temperature.

**Definition 1.** Fix a number \( k = 1, 2 \) or 3, and also a coloring of the cells of the set \( M_n \) into 4 colors. We say that fluid \( k \) **percolates between two sets** \( A, B \subset M_n \), if some cell of the set \( A \) is joined with some cell of the set \( B \) by a chain of adjacent cells such that each cell in the chain has color 0 or \( k \), including the initial cell of the set \( A \) and the final cell of the set \( B \).

2.1 Percolation between sides

We say that a cell \( x \in M_n \) belongs to a side \( A \) of the hexagon \( P \), if the cell \( x \) is a boundary cell and \( A \) is the nearest side to \( x \). A cell can belong to more than one side (if the cell has several nearest sides). In what follows, by side \( A \) we mean the set of all the cells belonging to the side \( A \) of the hexagon \( P \).

Label the sides of the hexagon \( P \) by numbers from 1 to 6 counterclock-wise. For \( k = 1, 2 \) or 3 denote by \( B_{k,n} \subset \Omega \) the set of all the colorings such that fluid \( k \) percolates between sides \( k \) and \( k + 3 \) of the hexagon \( P \). It is easy to show that events \( B_{1,n}, B_{2,n}, B_{3,n} \) are pairwise independent: \( P(B_{1,n} \cap B_{2,n}) - P(B_{1,n})P(B_{2,n}) = 0 \).

**Theorem 1** (K. Izyurov, A. Magazinov, 2018).

\[
\lim_{n \to +\infty} [P(B_{1,n} \cap B_{2,n} \cap B_{3,n}) - P(B_{1,n})P(B_{2,n})P(B_{3,n})] = 0.
\]

**Remark 1.** Theorem 1 holds in a much more general situation. For example, a regular hexagon \( P \) can be replaced by an arbitrary polygon, and opposite sides can be replaced by arbitrary pairs of sides. Nevertheless, for simplicity of the proof, we consider percolation between opposite sides of a regular hexagon.

Informally, Theorem 1 states that percolations of distinct fluids between opposite sides become mutually independent as \( n \) tends to \( \infty \). We take a difference of probabilities rather than a ratio to avoid proving that \( P(B_{1,n})P(B_{2,n})P(B_{3,n}) \) is bounded from zero.

In addition, we state the following conjecture.

**Conjecture 1.** \( P(B_{1,n} \cap B_{2,n} \cap B_{3,n}) \geq P(B_{1,n})P(B_{2,n})P(B_{3,n}) \) for each \( n \).

Since events \( B_{1,n}, B_{2,n}, B_{3,n} \) are independent, the conjecture states that percolations of distinct fluids are positively correlated, i.e.,

\[
P(B_{1,n}|B_{2,n} \cap B_{3,n}) \geq B_{1,n}.
\]
2.2 Percolation from the center

**Definition 2.** Fix a number \( k = 1, 2 \) or \( 3 \), and also a coloring of the cells of the set \( M_n \) into 4 colors. We say that fluid \( k \) **percolates from a cell** \( x \in M_n \) **to a set** \( A \subseteq M_n \), if \( x \) is joined with some cell of the set \( A \) by a chain of adjacent cells such that each cell in the chain has color 0 or \( k \), including the final cell of the set \( A \) and **not** including the initial cell \( x \).

Note that in Definition 2, unlike Definition 1, the color of the initial cell \( x \) does not matter. That is convenient to avoid a factor of 2 in the inequalities of Conjectures 2 and 3 below.

For \( k = 1, 2, \) and \( 3 \) denote by \( A_{k,n} \subset \Omega \) the set of colorings such that fluid \( k \) percolates from the cell \( O \) to the set of all the boundary cells of the set \( M_n \).

Let us state 2 conjectures.

**Conjecture 2.** \( P(A_{1,n} \cap A_{2,n} \cap A_{3,n}) \geq P(A_{1,n})P(A_{2,n})P(A_{3,n}) \) for each \( n \).

**Conjecture 3.** \( \lim_{n \to +\infty} \frac{P(A_{1,n} \cap A_{2,n} \cap A_{3,n})}{P(A_{1,n})P(A_{2,n})P(A_{3,n})} > 1 \).

In addition, we state one more conjecture that generalizes Conjectures 1 and 2.

**Conjecture 4.** Let \( A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 \subseteq M_n \). Denote by \( U_k = \{ \text{fluid } k \text{ percolates between } A_k \text{ and } B_k \} \). Then

\[
P(U_1 \cap U_2 \cap U_3) \geq P(U_1)P(U_2)P(U_3).
\]

If Conjecture 4 is true, then \( P(U_1|U_2 \cap U_3) \geq P(U_1) \), i.e., percolations between any three pairs of subsets are positively correlated.

2.3 Example

We illustrate the above notions by an example.

**Example 1.** Let \( n = 3 \). In Figure 1 we see a regular hexagon \( P \) on a honeycomb lattice of step \( \frac{1}{3} \). The set \( M_3 \) consists of 7 gray cells. It is easy to show that

\[
P(A_{1,3}) = P(A_{2,3}) = P(A_{3,3}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0.984375;
\]

\[
P(A_{1,3} \cap A_{2,3} \cap A_{3,3}) = 1 - 3 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 0.953857421875;
\]

\[
P(B_{1,3}) = P(B_{2,3}) = P(B_{3,3}) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{16}\right) = \frac{23}{128} = 0.1796875;
\]

\[
P(B_{1,3} \cap B_{2,3} \cap B_{3,3}) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \frac{3}{4} \cdot \left(9 \left(\frac{1}{4}\right)^6 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^4\right) = 0.00701904296875.
\]

Then

\[
\frac{P(A_{1,3} \cap A_{2,3} \cap A_{3,3})}{P(A_{1,3})P(A_{2,3})P(A_{3,3})} = \frac{250048}{250047} > 1 \quad \text{and} \quad P(B_{1,3} \cap B_{2,3} \cap B_{3,3}) - P(B_{1,3})P(B_{2,3})P(B_{3,3}) \approx 0.01.
\]

This agrees with Conjectures 1 and 2, and also show that both events \( A_{1,3}, A_{2,3}, A_{3,3} \) and events \( B_{1,3}, B_{2,3}, B_{3,3} \) are mutually dependent.
2.4 Kesten’s Theorem

The model introduced above naturally generalizes the classical percolation model (when cells are paint into 2 colors). In that model, the following famous result, used in the proof of Theorem 1, holds.

**Definition 3** (cf. Definition 2). Paint cells of some finite set $M$ into 2 colors ±1. We say that there exists percolation from a cell $x \in M$ to a set $A \subset M$ for that coloring, if $x$ is joined with some cell of the set $A$ by a chain of adjacent cells such that each cell in the chain has color +1, including the final cell of the set $A$ and not including the initial cell $x$. We introduce the measure $P(B) = |B|/2^m$ on the set of all the colorings of the set $M$ into 2 colors.

**Theorem 2.** (H. Kesten, 1982, cf. [5, Theorem 9.6]). The probability that there exists percolation from the cell $O$ to the boundary of the set $M$ tends to 0 as $n \to \infty$.

3 The Fourier-Walsh expansion

In this section, we introduce the notion of the Fourier-Walsh expansion and consider some properties of the coefficients of that expansion. The content of §§3.1-3.3 is borrowed from [1, §§1.2-1.4]. Lemma 7 from §3.4 is similar to a result from [1, §2.2]. Lemma 8 from §3.4 is contained in [1, §3.6] as an exercise.

**Agreement.** In what follows, on the set $\{-1, +1\}^m$, where $m \in \mathbb{N}$, fix the measure $P(B) = |B|/2^m$ for any $B \subset \{-1, +1\}^m$. Functions $f: \{-1, +1\}^m \to \mathbb{R}$ are considered as random variables on $\{-1, +1\}^m$.

3.1 Definition

**Definition 4.** Let $m \in \mathbb{N}$. The **Fourier-Walsh expansion of a function**

$$f: \{-1, +1\}^m \to \mathbb{R}$$

is its representation as the sum

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{S \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}} \hat{f}_S \prod_{i \in S} x_i,$$

where $\hat{f}_S$ are some real numbers that are called the **Fourier-Walsh coefficients**. If $S = \emptyset$, then we put by definition $\prod_{i \in S} x_i = 1$.

**Remark 2.** In what follows, we write $\hat{f}_S$ for the coefficient of a term $\prod_{i \in S} x_i$ in the Fourier-Walsh expansion of a function $f: \{-1, +1\}^m \to \mathbb{R}$.

**Theorem 3.** For any $f: \{-1, +1\}^m \to \mathbb{R}$, there exists a unique Fourier-Walsh expansion.

**Proof.**

**Existence.** For each point $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, where $a_i = \pm 1$, consider the function

$$1_a(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \left(\frac{1 + a_1 x_1}{2}\right) \left(\frac{1 + a_2 x_2}{2}\right) \cdots \left(\frac{1 + a_m x_m}{2}\right),$$

where $x_i = \pm 1$. Note that

$$1_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x = a; \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$
Therefore, any function $f : \{-1, +1\}^m \to \mathbb{R}$ can be written as

$$f(x) = \sum_{a \in \{-1, +1\}^m} f(a) 1_a(x).$$

Expanding this expression we obtain the required expansion.

Uniqueness. All the functions $f : \{-1, +1\}^m \to \mathbb{R}$ form a $2^m$-dimensional vector space. And there are exactly $2^m$ monomials of a form $\prod_{i \in S} x_i$, where $S \subset \{1, 2, \ldots, m\}$. Since any function is a linear span of such monomials, it follows that these monomials form a basis. Hence the Fourier-Walsh coefficients are unique.

3.2 A formula for the Fourier-Walsh coefficients

In this section, we introduce a formula for the Fourier-Walsh coefficients in terms of the expectation of a random variable (Lemma 4 below).

Notation 1. Let $S \subset \{1, 2, \ldots, m\}$. Denote by $\sigma_S$ the function $\sigma_S : \{-1, +1\}^m \to \{-1, +1\}$ given by the formula $\sigma_S(x_1, \ldots, x_m) = \prod_{i \in S} x_i$.

Lemma 1. Let $S, T \subset \{1, 2, \ldots, m\}$. Then $\sigma_S \sigma_T = \sigma_{S \Delta T}$.

Proof. We have $\sigma_S \sigma_T = \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in T} x_j = \prod_{i \in S \cap T} x_i^2 \prod_{j \in S \Delta T} x_i = \prod_{j \in S \Delta T} x_i = \sigma_{S \Delta T}$. □

Lemma 2. The random variables $\sigma_{\{1\}}, \sigma_{\{2\}}, \ldots, \sigma_{\{m\}}$ have expectation 0 and are mutually independent.

The proof of this lemma is obvious.

Lemma 3. Let $S \subset \{1, 2, \ldots, m\}$. Then

$$\mathbb{E}(\sigma_S) = \begin{cases} 1, & \text{if } S = \emptyset; \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

Proof. If $S = \emptyset$, then $\mathbb{E}(\sigma_S) = \mathbb{E}(1) = 1$.

If $S \neq \emptyset$, then by Lemma 2 we have

$$\mathbb{E}(\sigma_S) = \mathbb{E}\left(\prod_{i \in S} x_i \prod_{i \in S} \mathbb{E} x_i \right) = \prod_{i \in S} \mathbb{E} x_i = 0.$$

□

Lemma 4 (The formula for the Fourier-Walsh coefficients). Let $T \subset \{1, 2, \ldots, m\}$. Then for any function $f : \{-1, +1\}^m \to \mathbb{R}$ we have $\hat{f}_T = \mathbb{E}(f \sigma_T)$.

Proof. By Definition 4, Lemmas 1 and 3 we get

$$\mathbb{E}(f \sigma_T) = \mathbb{E}\left[ \sigma_T \cdot \sum_{S \subset \{1, 2, \ldots, m\}} \hat{f}_S \cdot \sigma_S \right] = \mathbb{E}\left[ \sum_{S \subset \{1, 2, \ldots, m\}} \hat{f}_S \cdot \sigma_{S \Delta T} \right] = \hat{f}_T.$$

□
3.3 Variance

In this section, we prove an important formula, which shows a relation between the variance of a Boolean function and the Fourier-Walsh coefficients of this function (Corollary 1 below). First we prove a simple fact.

Lemma 5. For any function \( f : \{-1,+1\}^m \to \{0,1\} \) we have \( 0 \leq \text{Var}(f) \leq 1 \).

Proof. Obviously, \( \mathbb{E}f \in [0,1] \). Hence \( \text{Var}(f) = \mathbb{E}(f^2) - (\mathbb{E}f)^2 = \mathbb{E}f - (\mathbb{E}f)^2 \in [0,1] \).

Lemma 6. For any function \( f : \{-1,+1\}^m \to \mathbb{R} \) we have \( \mathbb{E}(f^2) = \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,m\}} \hat{f}_S^2 \).

Proof. By Lemmas 1 and 3 we get

\[
\mathbb{E}(f^2) = \mathbb{E} \left[ \sum_{S \subseteq \{1,2,\ldots,m\}} \hat{f}_S \sigma_S \right]^2 = \mathbb{E} \left( \sum_{S \subseteq \{1,2,\ldots,m\}} \hat{f}_S \sigma_S^2 + 2 \sum_{S,T \subseteq \{1,2,\ldots,m\}, S \neq T} \hat{f}_S \hat{f}_T \sigma_S \triangle \sigma_T \right) = \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,m\}} \hat{f}_S^2.
\]

Corollary 1. For any function \( f : \{-1,+1\}^m \to \mathbb{R} \) we have

\[
\text{Var}(f) = \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,m\}, S \neq \emptyset} \hat{f}_S^2.
\]

Proof. Since \( \sigma_\emptyset = 1 \), by Lemmas 4 and 6 it follows that

\[
\text{Var}(f) = \mathbb{E}(f^2) - (\mathbb{E}f)^2 = \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,m\}, S \neq \emptyset} \hat{f}_S^2.
\]

3.4 Increasing Boolean functions

In this section, we consider only functions with the values in \( \{0,1\} \).

Definition 5. Let \( a = (a_1,a_2,\ldots,a_m), b = (b_1,b_2,\ldots,b_m) \in \{-1,1\}^m \). We write \( a \leq b \), if for each \( i = 1,\ldots,m \) we have \( a_i \leq b_i \). A function \( f : \{-1,+1\}^m \to \{0,1\} \) is called increasing, if the inequality \( a \leq b \) implies the inequality \( f(a) \leq f(b) \).

Definition 6. We say that a coordinate \( i \in \{1,2,\ldots,m\} \) is pivotal for \( f : \{-1,+1\}^m \to \{0,1\} \) on an input \( x = (x_1,\ldots,x_m) \in \{-1,+1\} \) if

\[
x_i = +1 \text{ and } f(x_1,\ldots,x_{i-1},+1,x_{i+1},\ldots,x_m) \neq f(x_1,\ldots,x_{i-1},-1,x_{i+1},\ldots,x_m).
\]

Remark 3. In the commonly used definition of a pivotal coordinate, one does not require the condition \( x_i = +1 \). However, it is convenient for us to add this condition. We hope this would not confuse reader.

Lemma 7. For each increasing function \( f : \{-1,+1\}^m \to \{0,1\} \) and each \( i \in \{1,\ldots,m\} \) we have

\[
\widehat{f}_{\{i\}} = P(\{x \in \{-1,+1\}^m : \text{the coordinate } i \text{ is pivotal for } f \text{ on the input } x\}).
\]
Proof. Denote
\[ B_+ = \{ x \in \{-1,+1\}^m : f(x) = 1, x_i = +1 \}; \]
\[ B_- = \{ x \in \{-1,+1\}^m : f(x) = 1, x_i = -1 \}. \]

Consider the injection \( g: B_- \rightarrow B_+ \) defined by the equality
\[ g(x_1, \ldots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, +1, x_{i+1}, \ldots, x_m) \]
for each \( x \in B_- \). Since the function \( f \) is increasing, it follows that the map is well-defined. Injectivity is obvious. By Lemma 4 we have
\[ \hat{f}(i) = \mathbb{E}(f(x)x_i) = \frac{|B_+| - |B_-|}{2^m} = \frac{|g(B_-)| + |B_+ \setminus g(B_-)| - |B_-|}{2^m} = \frac{|B_+ \setminus g(B_-)|}{2^m} = \frac{\{ x \in \{-1,+1\}^m : \text{the coordinate } i \text{ is pivotal for } f \text{ on the input } x \}}{2^m} = P(\{ x \in \{-1,+1\}^m : \text{the coordinate } i \text{ is pivotal for } f \text{ on the input } x \}). \]

\[ \square \]

Lemma 8. Let \( S \subset \{1,2,\ldots,m\}, S \neq \emptyset \). If a function \( f: \{-1,+1\}^m \rightarrow \{0,1\} \) is increasing, then for each \( i \in S \) we have \( \hat{f}_S \leq \hat{f}(i) \).

Proof. Fix \( i \in S \). Denote
\[ C_{++} = \{ x \in \{-1,+1\}^m : f(x) = 1, x_i = +1, \sigma_S(x) = +1 \}; \]
\[ C_{+-} = \{ x \in \{-1,+1\}^m : f(x) = 1, x_i = +1, \sigma_S(x) = -1 \}; \]
\[ C_{-+} = \{ x \in \{-1,+1\}^m : f(x) = 1, x_i = -1, \sigma_S(x) = +1 \}; \]
\[ C_{--} = \{ x \in \{-1,+1\}^m : f(x) = 1, x_i = -1, \sigma_S(x) = -1 \}. \]

Note that \( \{ x \in \{-1,+1\}^m : f(x) = 1 \} = C_{++} \cup C_{+-} \cup C_{-+} \cup C_{--} \).

By Lemma 4 we have
\[ \hat{f}(i) = \mathbb{E}(f(x)x_i) = \frac{|C_{++} \cup C_{+-}|-|C_{-+} \cup C_{--}|}{2^m}; \] (1)
\[ \hat{f}_S = \mathbb{E}(f(x)x_i) = \frac{|C_{++} \cup C_{-+}|-|C_{+-} \cup C_{--}|}{2^m}. \] (2)

Consider the injection \( h: C_{++} \rightarrow C_{++} \) defined by the equality
\[ h(x_1, \ldots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, +1, x_{i+1}, \ldots, x_m) \]
for each \( x \in C_{++} \). Since the function \( f \) is increasing and \( i \in S \), it follows that the map is well-defined. Injectivity is obvious. Thus \( |C_{++} \cup C_{+-}| \leq |C_{++} \cup C_{-+}| \) and \( |C_{++} \cup C_{+-}| \geq |C_{+-} \cup C_{--}| \).

Comparing (1) and (2) we get \( \hat{f}_S \leq \hat{f}(i) \).

Analogously one can prove that \( \hat{f}_S \geq -\hat{f}(i). \)

By Lemma 8 we have the following obvious corollary.

Corollary 2. Let a function \( f: \{-1,+1\}^m \rightarrow \{0,1\} \) be increasing. Then the maximal Fourier-Walsh coefficient, besides \( \hat{f}_S \), is one of \( \hat{f}(1), \ldots, \hat{f}(m) \).
4 Proof of the theorem

4.1 Restatement in terms of the Fourier-Walsh coefficients

To each coloring of the set $M_n$ into 4 colors assign three colorings of this set into 2 colors denoted by $\pm 1$. Table 1 shows which color is assigned to each cell.

| Coloring into 4 colors | Coloring 1 | Coloring 2 | Coloring 3 |
|------------------------|------------|------------|------------|
| 0                      | +1         | +1         | +1         |
| 1                      | +1         | -1         | -1         |
| 2                      | -1         | +1         | -1         |
| 3                      | -1         | -1         | +1         |

Remark 4. To each coloring into 4 colors assign the pair (coloring 1, coloring 2). This gives a bijection between the colorings of the set $M_n$:

$\{\text{Colorings into 4 colors } 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{\text{Colorings into 2 colors } \pm 1\}^2$.

The bijection preserves the measure on the set of colorings.

Remark 5. The color of a cell in the coloring 3 equals the product of colors of the cell in colorings 1 and 2.

Definition 7 (cf. Definition 1). Fix a coloring of the cells of the set $M_n$ into 2 colors $\pm 1$. We say that in this coloring there exists percolation between two sides $A$ and $B$ of the hexagon $P$ in $M_n$, if some cell of the side $A$ is joined with some cell of the side $B$ by a chain of adjacent cells such that each cell in the chain has color $+1$, including the initial cell of the side $A$ and the final cell of the side $B$.

Remark 6. Fluid $k$ percolates between two sides $A$ and $B$ of the hexagon in a coloring into 4 colors if and only if in the coloring $k$ there exists percolation between $A$ and $B$.

Suppose that the set $M_n$ has $m$ cells in total. Label the cells by numbers from 1 to $m$. In what follows, consider the following notation for colorings of the set $M_n$ into 2 or 4 colors.

Notation 2 (Colorings into 2 colors). To each coloring into 2 colors assign a point

$x = (x_1, \ldots, x_m) \in \{-1, +1\}^m$.

Notation 3 (Colorings into 4 colors). To colorings into 4 colors assign pairs of colorings into 2 colors by the bijection from Remark 4. Denote by $x_i$ and $y_i$ colors in the $i$-th cell in colorings 1 and 2 respectively. To each coloring into 4 colors assign a point

$(x, y) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) \in \{-1, +1\}^m \times \{-1, +1\}^m$.

For $k = 1, 2, 3$ consider the following functions of the coloring $x \in \{-1, +1\}^m$:

$$f^k(x) = \begin{cases} 1, & \text{if in the coloring } x \text{ there exists percolation between sides } k \text{ and } k+3 \text{ of the hexagon } P; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Notation 4. Let $S \subset \{1, 2, \ldots, m\}$. Denote by $\sigma_S$ and $\tau_S$ functions

$\{-1, +1\}^m \times \{-1, +1\}^m \rightarrow \{-1, +1\}$ defined by equations

$$\sigma_S(x, y) = \sigma_S(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) = \prod_{i \in S} x_i,$$

$$\tau_S(x, y) = \tau_S(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) = \prod_{i \in S} y_i.$$
We state a few properties of functions \( \sigma_S \) and \( \tau_S \). The proofs are analogous to the proofs of Lemmas 1-3.

**Lemma 9.** Let \( S, T \subset \{1, 2, \ldots, m\} \). Then:

a) \( \sigma_S \sigma_T = \sigma_{S \Delta T} \) and \( \tau_S \tau_T = \tau_{S \Delta T} \).
b) The random variables \( \sigma_{1, \ldots, m}, \sigma_{2, \ldots, m}, \cdots, \sigma_{m, \ldots, m}, \tau_{1, \ldots, m}, \tau_{2, \ldots, m}, \cdots, \tau_{m, \ldots, m} \) (on the space \( \{-1, +1\}^m \times \{-1, +1\}^m \)) have expectation 0 and are mutually independent.
c) \( \mathbb{E}(\sigma_S \tau_T) = \begin{cases} 1, & \text{if } S = T = \emptyset; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \)

Now we prove the main lemma of this subsection.

**Lemma 10.** \( P(B_{k,n}) = \hat{f}_3^k \) for each \( k = 1, 2, 3 \), and \( P(B_{1,n} \cap B_{2,n} \cap B_{3,n}) = \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}_S^1 \hat{f}_S^2 \hat{f}_S^3 \).

*Proof.* In the following computations, expectation in the proof is taken in the space \( \{-1, +1\}^m \) in the first three formulae and in the space \( \{-1, +1\}^m \times \{-1, +1\}^m \) in the last formula. We denote \( f^3(xy) = f^3(x_1y_1, \ldots, x_my_m) \).

By Definition 4, Lemmas 4 and 9, Remarks 6, 4, and 5 we have

\[
P(B_{1,n}) = \frac{|\{(x, y) \in \{-1, +1\}^m \times \{-1, +1\}^m : f^1(x) = 1\}|}{4^m} = \frac{2^m|x \in \{-1, +1\}^m : f^1(x) = 1|}{4^m} = \mathbb{E} f^1 = \hat{f}_3^1;
\]

\[
P(B_{2,n}) = \frac{|\{(x, y) \in \{-1, +1\}^m \times \{-1, +1\}^m : f^2(y) = 1\}|}{4^m} = \frac{2^m|y \in \{-1, +1\}^m : f^1(y) = 1|}{4^m} = \mathbb{E} f^2 = \hat{f}_3^2;
\]

\[
P(B_{3,n}) = \frac{|\{(x, y) \in \{-1, +1\}^m \times \{-1, +1\}^m : f^3(xy) = 1\}|}{4^m} = \frac{2^m|z \in \{-1, +1\}^m : f^3(z) = 1|}{4^m} = \mathbb{E} f^3 = \hat{f}_3^3.
\]

(Note that the proof of the third formula is slightly different from the first two proofs.)

\[
P(B_{1,n} \cap B_{2,n} \cap B_{3,n}) = \frac{|\{(x, y) \in \{-1, +1\}^m \times \{-1, +1\}^m : f^1(x)f^2(y)f^3(xy) = 1\}|}{4^m} =
\]

\[
= \mathbb{E} \left[ f^1(x)f^2(y)f^3(xy) \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}_S^1 \sigma_S \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}_S^2 \tau_S \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}_S^3 \sigma \tau_S \right] =
\]

\[
= \mathbb{E} \left[ \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}_S^1 \hat{f}_S^2 \hat{f}_S^3 \sigma^2 \tau^2 + \sum_{S,T,R \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}_S^1 \hat{f}_T^2 \hat{f}_R^3 \sigma \tau S \tau T \tau R \text{ not all } S,T,R \text{ are equal} \right] = \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}_S^1 \hat{f}_S^2 \hat{f}_S^3.
\]

\[\square\]

**Corollary 3.** \( P(B_{1,n} \cap B_{2,n} \cap B_{3,n}) - P(B_{1,n})P(B_{2,n})P(B_{3,n}) = \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}_S^1 \hat{f}_S^2 \hat{f}_S^3. \)

Thus for the proof of Theorem 1 it remains to prove that

\[
\lim_{n \to \infty} \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}_S^1 \hat{f}_S^2 \hat{f}_S^3 = 0.
\]
4.2 Pivotal colorings

Obviously, the functions $f^1, f^2, f^3$ are increasing. Therefore, all the lemmas from §3 hold for these functions. In the following lemma we make use of this.

**Lemma 11.**

\[
\sum_{\substack{S \subseteq \{1, \ldots, m\} \setminus \emptyset}} \left| \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}_S^1 \hat{f}_S^2 \hat{f}_S^3 \right| \leq \max_{i \in \{1, \ldots, m\}} P\{x \in \{-1, 1\}^m : \text{the coordinate } i \text{ is pivotal for } f^1 \text{ on the input } x\}.
\]

**Proof.** By the Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz inequality, Corollary 1, and Lemmas 5, 8, and 7 we have

\[
\sum_{\substack{S \subseteq \{1, \ldots, m\} \setminus \emptyset}} \left| \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}_S^1 \hat{f}_S^2 \hat{f}_S^3 \right| \leq \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \ldots, m\} \setminus \emptyset}} \left| \hat{f}_S^1 \right| \left| \hat{f}_S^2 \right| \left| \hat{f}_S^3 \right| \leq \max_{S \neq \emptyset} \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \ldots, m\} \setminus \emptyset}} \left| \hat{f}_S^1 \right| \left| \hat{f}_S^2 \right| \left| \hat{f}_S^3 \right| \leq \max_{S \neq \emptyset} \left| \hat{f}_S^1 \right| \sqrt{\text{Var}(f^2) \text{Var}(f^3)} \leq \max_{S \neq \emptyset} \left| \hat{f}_S^1 \right| = \max_{i \in \{1, \ldots, m\}} \left| \hat{f}_i^1 \right| = P\{x \in \{-1, 1\}^m : \text{the coordinate } i \text{ is pivotal for } f^1 \text{ on the input } x\}.
\]

**Lemma 12.** For each cell $i \in \{1, \ldots, m\}$ of the set $M_n$ we have

\[
P\{x \in \{-1, 1\}^m : \text{the coordinate } i \text{ is pivotal for } f^1 \text{ on the input } x\} \leq \min\{P\{x \in \{-1, 1\}^m : \text{in the coloring } x \text{ there exists percolation from the cell } i \text{ to the side 1}\}, P\{x \in \{-1, 1\}^m : \text{in the coloring } x \text{ there exists percolation from the cell } i \text{ to the side 4}\}\}.
\]

**Proof.** If the coordinate $i$ is pivotal for $f^1$ on the input $x$, then in the coloring $x$, a cell of the side 1 is joined with some cell of the side 4 by a chain of adjacent cells such that each cell in the chain has color $+1$. If the color of the cell $i$ is changed, then percolation disappears. Hence the chain must contain the cell $i$, and thus there is a chain of color $+1$ from the cell $i$ to the side 1, and a chain of color $+1$ from the cell $i$ to the side 4. This implies the required inequality. \qed

4.3 Conclusion of the proof

Let $i \in M_n$ be a cell (see Figure 2a). Denote by $r(i)$ the maximal distance from the center of the cell $i$ to the lines containing the sides 1 and 4 of the hexagon $P$. Denote by $P(i)$ the rectangle $2r(i) \times 8r(i)$ centered at the center of the cell $i$, with the larger side containing one of the side 1 or 4 of the hexagon $P$ (See Figure 2b). Without loss of generality we assume that the larger side of the rectangle contains the side 1 of the hexagon.

**Lemma 13.** The hexagon $P$ is entirely contained inside the rectangle $P(i)$.

**Proof.** (See Figure 2c). We introduce the Cartesian coordinate system centered at the center of the cell $i$, such that the $x$-axis is parallel to the line containing the side 1. Then the rectangle $2r(i) \times 8r(i)$ is given by the system

\[
\begin{cases}
-4r(i) \leq x \leq 4r(i), \\
-r(i) \leq y \leq r(i).
\end{cases}
\]
The "long diagonal" (see Figure 2d) of the hexagon $P$ equals 2, hence the hexagon $P$ is contained inside the rectangle

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ -r(i) \leq y \leq r(i). \end{cases}$$

(4)

The "small diagonal" (see Figure 2d) of the hexagon $P$ equals $\sqrt{3}$, hence $r(i) \geq \sqrt{3}/2$. Therefore, if a point $(x, y)$ satisfies system (4), then it also satisfies system (3).

Figure 2

To the set $M_n$ add all the cells that are entirely contained in the rectangle $P(i)$. Denote by $M'_n$ the resulting set. In what follows, the colorings of the set $M'_n$ into 2 colors $\pm 1$ are denoted by points in the set $\{-1, +1\}^{|M'_n|}$.

**Lemma 14.** The following inequalities hold:

$$P(\{x \in \{-1, +1\}^m : \text{in the coloring } x \text{ there exists percolation from the cell } i \text{ to the side } 1\}) \leq P(\{x \in \{-1, +1\}^{|M'_n|} : \text{in the coloring } x \text{ there exists percolation from the cell } i \text{ to the side } 1\}) \leq P(\{x \in \{-1, +1\}^{|M'_n|} : \text{in the coloring } x \text{ there exists percolation from the cell } i \text{ to the boundary of } M'_n\}).$$

**Proof.** By Lemma 13 we have $M_n \subset M'_n$. If there exists percolation in the coloring $x \in \{-1, +1\}^m$, then there exists percolation in all the colorings $y \in \{-1, +1\}^{|M'_n|}$ coinciding with the coloring $x$ on the set $M_n$. This implies the first inequality.

If in some coloring of the set $M_n$ there exists percolation from the cell $i$ to the side 1, then by Lemma 13 in this coloring there exists percolation from the cell $i$ to a cell of the boundary of the set $M'_n$. This implies the second inequality.

**Lemma 15.** We have

$$\min\{P(\{x \in \{-1, +1\}^m : \text{in the coloring } x \text{ there exists percolation from the cell } i \text{ to the side } 1\}), \quad P(\{x \in \{-1, +1\}^m : \text{in the coloring } x \text{ there exists percolation from the cell } i \text{ to the side } 4\})\} \leq P(\{\text{in the set } M_n \text{ there exists percolation from the cell } O \text{ to the boundary}\}).$$

**Proof.** Consider the regular hexagon centered at the center of the cell $i$, obtained from the hexagon $P$ by translation. Since $r(i) \geq \sqrt{3}/2$ (see. Figure 2d), it follows that the resulting hexagon is entirely contained inside the rectangle $P(i)$. By Lemma 14 this implies the required inequality.

**Proof of Theorem 1.** Theorem 1 follows directly from Corollary 3, Lemmas 11, 12, and 15, and Theorem 2.

Proof of Theorem 1.
4.4 Arguments in favor of Conjecture 3

In conclusion, we give informal arguments in favor of Conjecture 3. In the (degenerate) case when the hexagon \( P \) consists of a single cell, we have \( \frac{P(A_1,n \cap A_2,n \cap A_3,n)}{P(A_1,n)P(A_2,n)P(A_3,n)} = 1 \). In Example 1, the set \( M_n \) is larger, and we have \( \frac{P(A_1,n \cap A_2,n \cap A_3,n)}{P(A_1,n)P(A_2,n)P(A_3,n)} > 1 \). A natural conjecture is that as the number of the cells in the set \( M_n \) increases, the ratio in question also increases. We also give the following more solid argument by K. Izyurov.

Consider the following function of a coloring \( x \in \{-1, +1\}^m \):

\[
\chi(x) = \chi(x_1, \ldots, x_m) = \begin{cases} 
1, & \text{if in the coloring } x \text{ there exists percolation between the center and the boundary of the set } M_n; \\
0, & \text{otherwise.}
\end{cases}
\]

Now we state a lemma and a corollary. (The proofs are analogous to the proof of Lemma 10.)

**Lemma 16.** \( P(A_1,n) = P(A_2,n) = P(A_3,n) = \widetilde{\chi}_\emptyset \) and 
\[
P(A_1,n \cap A_2,n \cap A_3,n) = \sum_{S \subseteq \{1, \ldots, m\}} \widetilde{\chi}_S^3.
\]

**Corollary 4.** \( P(A_1,n \cap A_2,n \cap A_3,n) - P(A_1,n)P(A_2,n)P(A_3,n) = \sum_{S \subseteq \{1, \ldots, m\}} \sum_{S \neq \emptyset} \widetilde{\chi}_S^3. \)

Thus Conjectures 2 and 3 are equivalent to the inequalities

\[
\sum_{S \subseteq \{1, \ldots, m\}} \sum_{S \neq \emptyset} \widetilde{\chi}_S^3 > 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{S \subseteq \{1, \ldots, m\}} \sum_{S \neq \emptyset} \left( \frac{\widetilde{\chi}_S}{\widetilde{\chi}_\emptyset} \right)^3 > 0.
\]

The latter sum contains

\[
\sum_{s \text{ is adjacent to the center } O} \left( \frac{\widetilde{\chi}_S}{\widetilde{\chi}_\emptyset} \right)^3.
\]

Consider some cell \( i \) among the 6 ones adjacent to the center \( O \). The coefficient \( \chi_{(i)} \) equals the probability that the coordinate \( i \) is pivotal. It is easy to prove that the probability that the coordinate \( i \) is pivotal conditioned by the existence of percolation (i.e., \( \chi_{(i)}/\chi_{\emptyset} \)) is small, but positive and does not tend to 0 as \( n \to \infty \). Hence, these 6 summands make a contribution that does not disappear in the limit (and the desired limit can be equal to 0, only if this contribution is canceled with other Fourier-Welsh coefficients, what no reason can be seen for). Since a contribution is small, it is not noticed in numerical experiments.

5 Numerical experiments

In order to verify Conjectures 2-3 about percolation from the center, a computer program was written. (See C++ code in [6].)

Each side of the hexagon \( P \) is taken to be parallel to some side of a lattice cell. The program considers \( k \) random colorings of the polygon \( M_n \). Depending on input \( p = 1, 2, \) or 3, it computes the number \( T_p \) of colorings with percolation of all the fluids \( 1, \ldots, p \). (For example, if \( p = 2 \), then the program computes the number of colorings with percolation of both fluids 1 and 2.)

| Input | Output |
|-------|--------|
| \( n \) | \( T_p \) |
| \( k \) |
| \( p \) |
Output results for some \( n, k, \) and \( p \) are shown in Table 2. Additionally, the value
\[
P = \frac{(T_3/k)}{(T_1/k)^3} \approx \frac{P(A_1,n)P(A_2,n)P(A_3,n)}{P(A_1,n)P(A_2,n)P(A_3,n)}
\]
is computed. Presence of values \( P < 1 \) does not disprove Conjecture 2, because it can be caused by statistical deviations. For \( n = 500, k = 1000000, p = 1 \) the program runs approximately 2 hours.

| \( n \) | \( k \) | \( T_1 \)   | \( T_2 \)   | \( T_3 \)   | \( P \)  | \( P - 1 \) |
|--------|--------|------------|------------|------------|--------|----------|
| 3      | 10 000 000 | 9 844 112  | 9 690 354  | 9 538 785  | 1.000  | <0.001   |
| 4      | 10 000 000 | 9 843 390  | 9 691 475  | 9 537 528  | 1.000  | <0.001   |
| 5      | 10 000 000 | 9 655 567  | 9 327 500  | 9 009 425  | 1.001  | 0.001    |
| 6      | 10 000 000 | 9 575 758  | 9 166 785  | 8 779 321  | 1.000  | <0.001   |
| 7      | 10 000 000 | 9 478 577  | 8 985 300  | 8 522 311  | 1.001  | 0.001    |
| 8      | 10 000 000 | 9 368 765  | 8 778 158  | 8 229 285  | 1.001  | 0.001    |
| 9      | 10 000 000 | 9 285 683  | 8 630 914  | 8 016 759  | 1.000  | <0.001   |
| 10     | 10 000 000 | 9 211 830  | 8 475 622  | 7 813 657  | 1.000  | <0.001   |
| 15     | 10 000 000 | 8 898 951  | 7 893 907  | 7 030 482  | 0.998  | -0.002   |
| 20     | 10 000 000 | 8 657 067  | 7 466 236  | 6 462 095  | 0.996  | -0.004   |
| 25     | 10 000 000 | 8 461 617  | 7 166 402  | 6 016 836  | 0.993  | -0.007   |
| 50     | 1 000 000  | 787 626    | 621 883    | 490 967    | 1.005  | 0.005    |
| 100    | 1 000 000  | 733 994    | 539 606    | 395 491    | 1.000  | <0.001   |
| 150    | 1 000 000  | 707 948    | 500 289    | 354 320    | 0.999  | -0.001   |
| 200    | 1 000 000  | 681 800    | 466 133    | 318 058    | 1.004  | 0.004    |
| 300    | 1 000 000  | 660 490    | 429 462    | 283 512    | 0.984  | -0.016   |
| 400    | 1 000 000  | 633 621    | 402 712    | 259 337    | 1.019  | 0.019    |
| 500    | 1 000 000  | 621 187    | 386 527    | 242 821    | 1.013  | 0.013    |
| 1500   | 1 000 000  | 555 244    | 299 740    | 166 587    | 0.973  | -0.027   |

Let us describe the algorithm checking whether fluid 1 percolates from the center \( O \) to the boundary in a given coloring. Since the color of the center is irrelevant, we may assume that the center has color 0. (See Table 3 for examples.)

Fix a coloring. At the beginning, a beetle sits at the center. The beetle is allowed to move to an adjacent cell with color 0 or 1. We are going to find out if the beetle can reach the boundary.

**Step 1.** If the beetle is already in a boundary cell, then go to END1. Otherwise go to Step 2.

**Step 2.** If the color of the cell below the beetle is 0 or 1, then move the beetle downwards, and go to Step 1. If the color of the cell below the beetle is 2 or 3, then go to Step 3.

**Step 3.** (Building of a wall; see Table 3)
Construct a finite sequence (called a **wall** in what follows) of distinct adjacent sides of cells (called **wall segments**) as follows. The first term of the sequence is the bottom side of the cell where the beetle is located, and the second term of the sequence is adjacent to the left endpoint of the first wall segment. All the cells from one side of the wall have color 0 or 1, and all the cells from the other side of the wall have color 2 or 3. And finally, either the last wall segment lies between two boundary cells or all the wall segments surround some collection of cells of \( M_n \). In the former case go to END1 and in the latter case go to Step 4.

(It is easy to see that the wall is uniquely defined by the conditions above.)

**Step 4.** Draw the ray from the center of \( M_n \) to the bottom. If the ray intersects with wall segments (which were constructed in Step 3) an odd number of times, then go to END2. Otherwise, move the beetle to the cell right below the lowest wall segment intersecting the ray, and go to Step 1.

**END1.** There is a percolation from the center to the boundary.

**END2.** There is no percolation from the center to the boundary.
The following table shows how the algorithm works. In all three examples $n = 7$.

Table 3: Percolation-checking algorithm

| Example 1 | Example 2 | Example 3 |
|-----------|-----------|-----------|
| ![Diagram](image1) | ![Diagram](image2) | ![Diagram](image3) |
| At the beginning, the beetle is at the center. | The beetle moves downwards until it hits a blue cell. We put a wall segment right below the beetle. | We build the wall until we put a wall segment between two boundary cells. |
| The beetle moves downwards until it hits a blue cell. We put a wall segment right below the beetle. | The beetle moves downwards until it hits a red cell. We put a wall segment right below the beetle. We build the wall until it encloses some area of $M_7$. We draw the ray from the center to the bottom. The ray intersects a unique wall segment. Hence the beetle cannot reach the boundary. | We build a wall until it surrounds some area of $M_7$. We draw the ray from the center to the bottom. The ray intersects two wall segments. |
| The beetle can move along the wall to reach the boundary. | The beetle cannot reach the boundary. | The beetle gets around the wall. Afterwards, it moves down and reaches the boundary. |
6 Acknowledgements

The author is grateful to his research advisor M. Skopenkov for setting the problems and constant attention to this work; to K. Izyurov, A. Magazinov, and M. Khristoforov for reading this work and sending valuable comments; to K. Izyurov and A. Magazinov for telling the proof of Theorem 1.

References

[1] R. O’Donnell. Analysis of Boolean functions. Cambridge University Press, New York, 2014.

[2] H. Kesten, Percolation theory for mathematicians, Birkhäuser, Boston, 1982.

[3] H. Duminil-Copin, Introduction to Bernoulli percolation, 2018, https://www.ihes.fr/~duminil/publi/2017percolation.pdf.

[4] G. Grimmet, Percolation (2. ed). Springer Verlag, 1999.

[5] A. Yadin, Percolation, 2013, https://www.math.bgu.ac.il/~yadina/percolation.pdf.

[6] I. Novikov, A software to compute probability, https://github.com/IVNov/percolation-in-hexagonal-lattice/blob/master/PPercolation.cpp.
Протекание трёх жидкостей на шестиугольной решетке

И. В. Новиков

Аннотация

В данной работе рассматривается естественное обобщение перколяции: протекание трёх взаимосвязанных жидкостей на шестиугольной решётке. К. Изъюров и А. Магазинов доказали, что протекания разных жидкостей между противоположными сторонами фиксированного шестиугольника становятся независимыми в совокупности при измельчении решётки. Мы подробно изложим это доказательство для неспециалистов с незначительными упрощениями. Также мы сформулируем несколько новых близких гипотез на основе численных экспериментов.

Ключевые слова— Преобразование Фурье-Уэлша, модель Поттса, протекание, шестиугольная решётка, булевы функции.

Оглавление

1. Введение 2

2. Формулировка основного результата 2
   2.1. Протекание между сторонами 2
   2.2. Протекание из центра 3
   2.3. Пример 3
   2.4. Теорема Кестена 4

3. Разложение Фурье-Уэлша 4
   3.1. Определение 4
   3.2. Формула для коэффициентов 5
   3.3. Дисперсия 6
   3.4. Возрастающие булевы функции 7

4. Доказательство основной теоремы 8
   4.1. Переформулировка в терминах коэффициентов Фурье-Уэлша 8
   4.2. Критические раскраски 10
   4.3. Завершение доказательства 11
   4.4. Аргументы в пользу истинности гипотезы 3 12

5. Численные эксперименты 13

6. Благодарности 16
1. Введение

В данной работе рассматривается естественное обобщение перколяции: протекание трёх взаимосвязанных жидкостей на шестиугольной решётке. Мы докажем (см. теорему 1), что протекания разных жидкостей между противоположными сторонами фиксированного шестиугольника становятся независимыми в совокупности при измельчении решётки. Данное утверждение в качестве гипотезы на основе численных экспериментов предложил М. Скопенков, а затем приблизительно в одно и то же время независимо доказали К. Изъюров и А. Магазинов (частное сообщение) с помощью разложения Фурье-Уэлша и теоремы Кестена. В данной работе это доказательство подробно излагается для неспециалистов, с незначительными упрощениями. Помимо доказательства теоремы, мы сформулируем несколько новых близких гипотез на основе численных экспериментов.

План работы. В §2 вводятся основные понятия, формулируется основная теорема 1 и несколько гипотез. В §3 вводится разложение Фурье-Уэлша. В §4 при помощи этого разложения проводится доказательство теоремы 1 из §2. В §5 описаны результаты численных экспериментов, связанных с гипотезами из §2.

2. Формулировка основного результата

Для любого \( n > 1 \) рассмотрим шестиугольную решётку со стороной клетки \( \frac{1}{n} \). Пусть \( P \) — правильный шестиугольник со стороной 1, центр которого расположен в центре некоторой клетки \( O \). Обозначим через \( M_n \) множество всех клеток, принадлежащих \( P \), включая границу. Рассмотрим вероятностное пространство \( \Omega \), состоящее из всех раскрасок клеток множества \( M_n \) в 4 цвета, обозначаемых числами 0, 1, 2, 3, с мерой \( P(B) = |B|/4^{|M_n|} \) для любого \( B \subseteq \Omega \). Оно называется моделью Поттса с 4 состояниями при бесконечной температуре.

Определение 1. Зададим число \( k = 1, 2 \) или 3 и некоторую раскраску клеток множества \( M_n \) в 4 цвета. Будем говорить, что жидкость \( k \) протекает между двумя множествами \( A, B \subseteq M_n \), если некоторую клетку множества \( A \) можно соединить c некоторой клеткой множества \( B \) цепочкой клеток, соседних по стороне, в которой каждая клетка имеет цвет 0 или \( k \), включая начальную клетку множества \( A \) и конечную клетку множества \( B \).

2.1. Протекание между сторонами

Будем говорить, что клетка \( x \in M_n \) принадлежит стороне \( A \) шестиугольника \( P \), если \( x \) является граничной и \( A \) является ближайшей к \( x \). Клетка может принадлежать более, чем одной стороне (если окажется, что ближайших сторон несколько). В дальнейшем множество клеток, принадлежащих стороне \( A \), будем также называть стороной \( A \).

Прошумеруем стороны шестиугольника \( P \) числами от 1 до 6 против часовой стрелки. Для \( k = 1, 2 \) или 3 обозначим через \( B_{k,n} \subseteq \Omega \) множество таких раскрасок, что жидкость \( k \) протекает между сторонами \( k \) и \( k + 3 \) шестиугольника \( P \). Легко видеть, что события \( B_{1,n}, B_{2,n}, B_{3,n} \) попарно независимы: \( P(B_{1,n} \cap B_{2,n}) = P(B_{1,n})P(B_{2,n}) \).

Теорема 1 (К. Изъюров, А. Магазинов, 2018).

\[
\lim_{n \to +\infty} \left[ P(B_{1,n} \cap B_{2,n} \cap B_{3,n}) - P(B_{1,n})P(B_{2,n})P(B_{3,n}) \right] = 0.
\]

Замечание 1. Теорема 1 верна в значительно большей общности: например, правильный шестиугольник \( P \) можно заменить на произвольный многоугольник, а противоположные стороны — на любые пары сторон. Однако для простоты доказательства мы будем рассматривать именно протекание между противоположными сторонами правильного шестиугольника.
Неформально, теорема 1 означает, что протекания различных жидкостей между сторонами становятся независимыми в совокупности при $n \to \infty$. Мы рассматриваем разность, а не отношение, чтобы не пришлось доказывать отделимость $P(B_{1,n})P(B_{2,n})P(B_{3,n})$ от нуля.
Сформулируем дополнительно гипотезу.

**Гипотеза 1.** $P(B_{1,n} \cap B_{2,n} \cap B_{3,n}) \geq P(B_{1,n})P(B_{2,n})P(B_{3,n})$ для всех $n$.

С учётом попарной независимости событий $B_{1,n}, B_{2,n}, B_{3,n}$ эта гипотеза означает, что протекания различных жидкостей положительно скоррелированы, т.е.

$$P(B_{1,n}|B_{2,n} \cap B_{3,n}) \geq B_{1,n}.$$  

2.2. Протекание из центра

**Определение 2.** Зададим число $k = 1, 2$ или $3$ и некоторую раскраску клеток множества $M_n$ в 4 цвета. Будем говорить, что жидкость $k$ протекает из клетки $x \in M_n$ до множества $A \in M_n$, если $x$ можно соединить с некоторой клеткой множества $A$ цепочкой клеток, соседних по стороне, в которой каждая клетка имеет цвет 0 или $k$, не включая начальную клетку $x$ и включая конечную клетку множества $A$.

Отметим, что в определении 2, в отличие от определения 1, цвет стартовой клетки $x$ не имеет значения. Это удобно, так как иначе в формулировках гипотез 2 и 3 ниже появился бы дополнительный множитель 2 в правых частях.

Для $k = 1, 2$ или $3$ обозначим через $A_{k,n} \subset \Omega$ множество таких раскрасок, что жидкость $k$ протекает из клетки $O$ до множества границных клеток множества $M_n$.

Сформулируем 2 гипотезы.

**Гипотеза 2.** $P(A_{1,n} \cap A_{2,n} \cap A_{3,n}) \geq P(A_{1,n})P(A_{2,n})P(A_{3,n})$ для всех $n$.

**Гипотеза 3.** $\lim_{n \to \infty} P(A_{1,n} \cap A_{2,n} \cap A_{3,n})/P(A_{1,n})P(A_{2,n})P(A_{3,n}) > 1$.

Дополнительно приведём ещё одну гипотезу, по сути обобщающую гипотезы 1 и 2.

**Гипотеза 4.** Пусть $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 \subset M_n$. Обозначим $U_k = \{каждая жидкость $k$ протекает между множествами $A_k$ и $B_k\}$. Тогда

$$P(U_1 \cap U_2 \cap U_3) \geq P(U_1)P(U_2)P(U_3).$$

В случае истинности гипотезы 4 выполнено, что $P(U_1|U_2 \cap U_3) \geq P(U_1)$.

2.3. Пример

Проиллюстрируем на примере введённые выше понятия.

**Пример 1.** Пусть $n = 3$. На рисунке 1 изображён правильный шестиугольник $P$, расположенный на шестиугольной решётке со стороной клетки $1/3$. Множество $M_3$ содержит 7 серых клеток. Легко видеть, что

$$P(A_{1,3}) = P(A_{2,3}) = P(A_{3,3}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0,984375;$$

$$P(A_{1,3} \cap A_{2,3} \cap A_{3,3}) = 1 - 3 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 0,953857421875;$$

Рис. 1
Пусть \( P(B_{1,3}) = P(B_{2,3}) = P(B_{3,3}) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{16} \right) = \frac{23}{128} = 0,1796875; \)

\[
P(B_{1,3} \cap B_{2,3} \cap B_{3,3}) = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^6 + \frac{3}{4} \cdot \left( 9 \left( \frac{1}{4} \right)^6 + 2 \left( \frac{1}{2} \right)^2 \left( \frac{1}{4} \right)^4 \right) = 0,00701904296875.
\]

Тогда

\[
\frac{P(A_{1,3} \cap A_{2,3} \cap A_{3,3})}{P(A_{1,3})P(A_{2,3})P(A_{3,3})} = \frac{250048}{250047} > 1 \text{ и}
\]

\[
P(B_{1,3} \cap B_{2,3} \cap B_{3,3}) \approx P(B_{1,3})P(B_{2,3})P(B_{3,3}) \approx 0,01.
\]

что согласуется с гипотезами 1 и 2, а также показывает, что как события \( A_{1,3}, A_{2,3}, A_{3,3} \), так и события \( B_{1,3}, B_{2,3}, B_{3,3} \) зависимы в совокупности.

### 2.4. Теорема Кестена

Введённые нами понятия естественно обобщают классическую модель перколяции, когда клетки решётки красятся в 2 цвета. Сформулируем известный результат о перколяции, который пригодится нам для доказательства теоремы 1.

Определение 3 (ср. с определением 2). Пусть дана раскраска клеток некоторого конечного множества \( M \) в 2 цвета \( \pm 1 \). Будем говорить, что для этой раскраски существует протекание из клетки \( x \in M \) до множества \( A \subseteq M \), если \( x \) можно соединить с некоторой клеткой множества \( A \) цепочкой клеток, соседних по стороне, в которой каждая клетка имеет цвет \( +1 \), не включая \( x \) и включая конечную клетку множества \( A \). Введём на множестве раскрасок множества \( M \) в 2 цвета меру \( P(B) = |B|/2^m \).

Теорема 2. (Г. Кестен, 1982, ср. с [5, Theorem 9.6]). При \( n \to \infty \) вероятность существования протекания из клетки \( O \) до границы множества \( M_n \) стремится к 0.

### 3. Разложение Фурье-Уэлша

В этом разделе мы введём понятие разложения Фурье-Уэлша функций и рассмотрим некоторые свойства коэффициентов этого разложения. Содержание §§3.1-3.3 заимствовано из книги [1, §§1.2-1.4]. Лемма 7 из подраздела 3.4 аналогична результатам из [1, §2.2]. Лемма 8 из подраздела 3.4 приведена в [1, §3.6] в качестве упражнения.

Соглашение. Всюду далее в этой статье на множестве \( \{-1,+1\}^m \), где \( m \in \mathbb{N} \), фиксирована мера \( P(B) = |B|/2^m \) для любого \( B \subseteq \{-1,+1\}^m \). Функции \( f: \{-1,+1\}^m \to \mathbb{R} \) рассматриваются как случайные величины на \( \{-1,+1\}^m \).

### 3.1. Определение

Определение 4. Пусть \( m \in \mathbb{N} \). Разложением Фурье-Уэлша функции

\[
f: \{-1,+1\}^m \to \mathbb{R}
\]

называется её представление в виде суммы

\[
f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{s \subseteq \{1,2,\ldots,m\}} \hat{f}_s \prod_{i \in s} x_i,
\]

где \( \hat{f}_s \) — некоторые вещественные числа, называемые коэффициентами Фурье-Уэлша. Если \( S = \emptyset \), то считаем по определению, что \( \prod_{i \in S} x_i = 1. \)
Замечание 2. Далее $f_S$ всегда будет обозначать коэффициент при $\prod_{i \in S} x_i$ в разложении Фурье-Уэлша функции $f : \{-1,+1\}^m \to \mathbb{R}$.

Теорема 3. Для любой функции $f : \{-1,+1\}^m \to \mathbb{R}$ разложение Фурье-Уэлша существует и единственно.

Доказательство. Докажем существование разложения. Для каждой точки $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, где $a_i = \pm 1$, рассмотрим функцию

$$1_a(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \left(\frac{1 + a_1x_1}{2}\right) \left(\frac{1 + a_2x_2}{2}\right) \cdots \left(\frac{1 + a_mx_m}{2}\right),$$

определенную при $x_i = \pm 1$. Заметим, что

$$1_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = a; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Значит, произвольную функцию $f : \{-1,+1\}^m \to \mathbb{R}$ можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{a \in \{-1,+1\}^m} f(a)1_a(x).$$

Раскрыв скобки и сгруппировав слагаемые, получаем требуемое разложение.

Докажем теперь единственность коэффициентов. Множество всех функций $f : \{-1,+1\}^m \to \mathbb{R}$ образуют $2^m$-мерное векторное пространство. Но мономов вида $\prod_{i \in S} x_i$, где $S \subset \{1, 2, \ldots, m\}$, как раз $2^m$. Поскольку любая функция является линейной комбинацией таких мономов, то эти мономы образуют базис. Из этого получаем единственность коэффициентов Фурье-Уэлша.

3.2. Формула для коэффициентов

В этом разделе приводится формула для коэффициентов Фурье-Уэлша через матожидание некоторой случайной величины (лемма 4 ниже).

Обозначение 1. Пусть $S \subset \{1, 2, \ldots, m\}$. Обозначим через $\sigma_S$ функцию $\sigma_S : \{-1,+1\}^m \to \{-1,+1\}$, заданную формулой $\sigma_S(x_1, \ldots, x_m) = \prod_{i \in S} x_i$.

Лемма 1. Пусть $S, T \subset \{1, 2, \ldots, m\}$. Тогда $\sigma_S \sigma_T = \sigma_{S \triangle T}$.

Доказательство. $\sigma_S \sigma_T = \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in T} x_i = \prod_{i \in S \cap T} x_i^2 \prod_{j \in S \Delta T} x_i = \prod_{j \in S \Delta T} x_i = \sigma_{S \Delta T}.$

Лемма 2. Случайные величины $\sigma_{\{1\}}, \sigma_{\{2\}}, \ldots, \sigma_{\{m\}}$ имеют нулевое математическое ожидание и независимы в совокупности.

Доказательство этой леммы очевидно.

Лемма 3. Пусть $S \subset \{1, 2, \ldots, m\}$. Тогда

$$E\sigma_S = \begin{cases} 1, & \text{если } S = \emptyset; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Если $S = \emptyset$, то $E\sigma_{\emptyset} = E1 = 1$.

Если $S \neq \emptyset$, то с учётом леммы 2 имеем

$$E(\sigma_S) = E\prod_{i \in S} x_i = \prod_{i \in S} Ex_i = 0.$$
Лемма 4 (Формула для коэффициентов Фурье-Уэлша). Пусть $T \subset \{1, 2, \ldots, m\}$. Тогда для любой функции $f: \{-1, +1\}^m \to \mathbb{R}$ справедлива формула
\[
\hat{f}_T = \mathbb{E}(f \sigma_T).
\]
Доказательство. С учётом определения 4, лемм 1 и 3 имеем
\[
\mathbb{E}(f \sigma_T) = \mathbb{E} \left[ \sigma_T \cdot \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}_S \sigma_S \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}_S \sigma_{S \Delta T} \right] = \hat{f}_T.
\]

3.3. Дисперсия

Нам будет полезна аналогичная формула для дисперсии (следствие 1 ниже). Для начала докажем простой факт.

Лемма 5. Для любой функции $f: \{-1, +1\}^m \to \{0, 1\}$ справедливо, что
\[0 \leq \text{Var}(f) \leq 1.\]
Доказательство. Очевидно, что $\mathbb{E} f \in [0, 1]$. Поэтому
\[\text{Var}(f) = \mathbb{E}(f^2) - (\mathbb{E} f)^2 = \mathbb{E} f - (\mathbb{E} f)^2 \in [0, 1].\]

Лемма 6. Для любой функции $f: \{-1, +1\}^m \to \mathbb{R}$ справедлива формула
\[\mathbb{E}(f^2) = \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}_S^2.
\]
Доказательство. С учётом лемм 1 и 3 имеем
\[
\mathbb{E}(f^2) = \mathbb{E} \left[ \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}_S \sigma_S \right]^2 = \mathbb{E} \left( \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}_S^2 \sigma_S^2 + 2 \sum_{S, T \subset \{1, \ldots, m\}, S \neq T} \hat{f}_S \hat{f}_T \sigma_S \sigma_{S \Delta T} \right) = \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}_S^2.
\]

Следствие 1. Для любой функции $f: \{-1, +1\}^m \to \mathbb{R}$ справедлива формула
\[\text{Var}(f) = \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}, S \neq \emptyset} \hat{f}_S^2.
\]
Доказательство. Так как $\sigma_{\emptyset} = 1$, то с учётом лемм 4 и 6 получаем
\[\text{Var}(f) = \mathbb{E}(f^2) - (\mathbb{E} f)^2 = \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}, S \neq \emptyset} \hat{f}_S^2.
\]
3.4. Возрастающие булевы функции

В этом параграфе мы рассматриваем только функции со значениями в \{0, 1\}.

Определение 5. Пусть \(a = (a_1, a_2, \ldots, a_m), b = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \{-1, 1\}^m\). Мы пишем \(a \leq b\), если для всех \(i = 1, \ldots, m\) верно, что \(a_i \leq b_i\). Функция \(f: \{-1, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}\) называется возрастающей, если из неравенства \(a \leq b\) следует \(f(a) \leq f(b)\).

Определение 6. Для данной функции \(f: \{-1, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}\) назовём точку \((x_1, \ldots, x_m) \in \{-1, 1\}^m\) \(i\)-критической, если

\[
x_i = 1 \text{ и } f(x_1, \ldots, x_{i-1}, +1, x_{i+1}, \ldots, x_m) \neq f(x_1, \ldots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \ldots, x_m).
\]

Лемма 7. Для любой возрастающей функции \(f: \{-1, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}\) и любого \(i \in \{1, \ldots, m\}\) справедлива формула

\[
\widehat{f}_{(i)} = P(\{x \in \{-1, 1\}^m : x \text{ является } i\text{-критической}\}).
\]

Доказательство. Введём обозначения:

\[
B_+ = \{x \in \{-1, 1\}^m : f(x) = 1, x_i = +1\};
\]

\[
B_- = \{x \in \{-1, 1\}^m : f(x) = 1, x_i = -1\}.
\]

Рассмотрим вложение \(g: B_- \rightarrow B_+\), определённое для каждого \(x \in B_-\) равенством

\[
g(x_1, \ldots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, +1, x_{i+1}, \ldots, x_m).
\]

Так как функция \(f\) возрастающая, то отображение определено корректно. Инъективность очевидна. По лемме 4 имеем

\[
\widehat{f}_{(i)} = \mathbb{E}(f x_i) = \frac{|B_+| - |B_-|}{2^m} = \frac{|g(B_-)| + |B_+ \setminus g(B_-)| - |B_-|}{2^m} = \frac{|B_+ \setminus g(B_-)|}{2^m} = \frac{|\{x \in \{-1, 1\}^m : x \text{ является } i\text{-критической}\}|}{2^m} = P(\{x \in \{-1, 1\}^m : x \text{ является } i\text{-критической}\}).
\]

Лемма 8. Пусть \(S \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}, S \neq \emptyset\). Если функция \(f: \{-1, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}\) возрастает, то для любого \(i \in S\) выполнено \(|\widehat{f}_S| \leq \widehat{f}_{(i)}|\).

Доказательство. Зафиксируем \(i \in S\). Введём обозначения:

\[
C_{++} = \{x \in \{-1, 1\}^m : f(x) = 1, x_i = +1, \sigma_S(x) = +1\};
\]

\[
C_{+-} = \{x \in \{-1, 1\}^m : f(x) = 1, x_i = +1, \sigma_S(x) = -1\};
\]

\[
C_{-+} = \{x \in \{-1, 1\}^m : f(x) = 1, x_i = -1, \sigma_S(x) = +1\};
\]

\[
C_{--} = \{x \in \{-1, 1\}^m : f(x) = 1, x_i = -1, \sigma_S(x) = -1\}.
\]

Заметим, что \(\{x \in \{-1, 1\}^m : f(x) = 1\} = C_{++} \cup C_{+-} \cup C_{-+} \cup C_{--}\).

По лемме 4 имеем

\[
\widehat{f}_{(i)} = \mathbb{E}(f x_i) = \frac{|C_{++} \cup C_{+-}| - |C_{-+} \cup C_{--}|}{2^m};
\]

\[
\widehat{f}_S = \mathbb{E}(f \sigma_S) = \frac{|C_{++} \cup C_{+-}| - |C_{-+} \cup C_{--}|}{2^m}.
\]
Построим вложение \( h: C_- \hookrightarrow C_+ \), определённое для каждого \( x \in C_- \) равенством
\[
h(x_1, \ldots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, +1, x_{i+1}, \ldots, x_m).
\]
Так как функция \( f \) возрастает и \( i \in S \), то отображение определено корректно. Инъективность очевидна. Таким образом, \( |C_+ \cup C_-| \leq |C_+ \cup C_-| \) и \( |C_+ \cup C_-| \geq |C_- \cup C_-| \).

Сопоставляя (1) и (2) получаем, что \( \widehat{f_S} \leq \widehat{f_i} \).

Из леммы 8 получаем очевидное следствие.

Следствие 2. Пусть функция \( f : \{−1, +1\}^m \to \{0, 1\} \) возрастает. Тогда наибольший коэффициент Фурье-Уэлша, кроме \( \widehat{f_\emptyset} \), — это один из \( \widehat{f_\{1\}}, \ldots, \widehat{f_\{m\}} \).

4. Доказательство основной теоремы

4.1. Переформулировка в терминах коэффициентов Фурье-Уэлша

Сопоставим каждой раскраске множества \( M \) в 4 цвета три раскраски этого множества в два цвета, обозначаемых \( \pm 1 \). Таблица 1 показывает, какой цвет сопоставляется каждой клетке.

| Раскраска в 4 цвета | Раскраска 1 | Раскраска 2 | Раскраска 3 |
|---------------------|-------------|-------------|-------------|
| 0                   | +1          | +1          | +1          |
| 1                   | +1          | −1          | −1          |
| 2                   | −1          | +1          | −1          |
| 3                   | −1          | −1          | +1          |

Замечание 3. Существует биекция между раскрасками множества \( M \)

\[
\{\text{раскраски в 4 цвета } 0, 1, 2, 3\} \to \{\text{раскраски в 2 цвета } \pm 1\}^2,
\]

сопоставляющая каждой раскраске в 4 цвета пару (раскраска 1, раскраска 2). Эта биекция сохраняет меру на множествах раскрасок.

Замечание 4. Для того, чтобы узнать цвет клетки в раскраске 3, достаточно перемножить цвет этой клетки в раскрасках 1 и 2.

Определение 7 (спр. с определением 1). Пусть дана раскраска клеток множества \( M \) в 2 цвета \( \pm 1 \). Будем говорить, что в \( M \) существует протекание между двумя сторонами \( A \) и \( B \) шестиугольника \( P \), если некоторую клетку стороны \( A \) можно соединить с некоторой клеткой стороны \( B \) цепочкой клеток, соседних по стороне, в которой каждая клетка имеет цвет \( +1 \), включая начальную клетку на стороне \( A \) и конечную клетку на стороне \( B \).

Замечание 5. Жидкость \( k \) протекает между двумя сторонами \( A \) и \( B \) шестиугольника в изначальной раскраске в 4 цвета тогда и только тогда, когда в раскраске \( k \) существует протекание между двумя сторонами \( A \) и \( B \).

Пусть в множестве \( M \) всего \( m \) клеток. Занумеруем их. С этого момента введём обозначения для раскрасок множества \( M \) в 2 либо в 4 цвета.

Обозначение 2 (раскраски в 2 цвета). Каждую раскраску в 2 цвета будем далее обозначать как точку \( x = (x_1, \ldots, x_m) \in \{−1, +1\}^m \).
Обозначение 3 (раскраски в 4 цвета). Отождествим раскраски в 4 цвета с парами раскрасок в 2 цвета с помощью биекции из замечания 3. Обозначим через \( x_i \) и \( y_i \) цвет в \( i \)-ой клетке в раскрасках 1 и 2 соответственно. Каждую раскраску в 4 цвета далее будем обозначать как точку

\[
(x, y) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) \in \{-1, +1\}^m \times \{-1, +1\}^m.
\]

Для \( k = 1, 2, 3 \) рассмотрим следующие функции от раскраски \( x \in \{-1, +1\}^m \):

\[
f^k(x) = \begin{cases} 
1, & \text{если в раскраске } x \text{ существует протекание между сторонами } k \text{ и } k + 3 \text{ шестиугольника } P; \\
0, & \text{инаке.}
\end{cases}
\]

Обозначение 4. Пусть \( S \subset \{1, 2, \ldots, m\} \). Обозначим через \( \sigma_S \) и \( \tau_S \) функции \( \{-1, +1\}^m \times \{-1, +1\}^m \to \{-1, +1\} \), заданные формулами

\[
\sigma_S(x, y) = \sigma_S(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) = \prod_{i \in S} x_i,
\]

\[
\tau_S(x, y) = \tau_S(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) = \prod_{i \in S} y_i.
\]

Сформулируем несколько свойств функций \( \sigma_S \) и \( \tau_S \). Доказательства аналогичны доказательствам лемм 1-3.

Лемма 9. Пусть \( S, T \subset \{1, 2, \ldots, m\} \). Тогда:

a) \( \sigma_S \sigma_T = \sigma_{S \Delta T} \) и \( \tau_S \tau_T = \tau_{S \Delta T} \).

b) Случайные величины \( \sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(m), \tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(m) \) (на пространстве \( \{-1, +1\}^m \times \{-1, +1\}^m \)) и нулевое математическое ожидание и независимы в совокупности.

c) \( \mathbb{E}(\sigma_S \tau_T) = \begin{cases} 
1, & \text{если } S = T = \emptyset; \\
0, & \text{инаке.}
\end{cases} \)

Сформулируем основную лемму данного подраздела.

Лемма 10. \( P(B_{k,n}) = \widehat{f}_k^3 \) для любого \( k = 1, 2, 3 \), и \( P(B_{1,n} \cap B_{2,n} \cap B_{3,n}) = \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \widehat{f}_{\overline{S}} \widehat{f}_0 \).

Доказательство. Матожидание в этом доказательстве берётся в пространстве \( \{-1, +1\}^m \) в первых трёх формулках и в пространстве \( \{-1, +1\}^m \times \{-1, +1\}^m \) в последней формуле. Мы обозначаем \( f^3(xy) = f^3(x_1y_1, \ldots, x_my_m) \).

С учётом определения 4, лемм 4 и 9, а также замечаний 5, 3 и 4 имеем

\[
P(B_{1,n}) = \frac{\{ (x, y) \in \{-1, +1\}^m \times \{-1, +1\}^m : f^1(x) = 1 \}}{4^m} = \frac{2^m}{4^m} \mathbb{E} f^1 = \widehat{f}_1^1;
\]

\[
P(B_{2,n}) = \frac{\{ (x, y) \in \{-1, +1\}^m \times \{-1, +1\}^m : f^2(y) = 1 \}}{4^m} = \frac{2^m}{4^m} \mathbb{E} f^2 = \widehat{f}_2^2;
\]

\[
P(B_{3,n}) = \frac{\{ (x, y) \in \{-1, +1\}^m \times \{-1, +1\}^m : f^3(xy) = 1 \}}{4^m} = \frac{2^m}{4^m} \mathbb{E} f^3 = \widehat{f}_3^3.
\]

(Обращаем внимание, что доказательство третьей формулы немного отличается от первых двух).
\[ P(B_{1,n} \cap B_{2,n} \cap B_{3,n}) = \left| \{(x, y) \in \{-1, +1\}^m \times \{-1, +1\}^m : f^1(x) f^2(y) f^3(xy) = 1\} \right| = \]
\[ = E \left[ f^1(x) f^2(y) f^3(xy) \right] = E \left[ \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}^2_S \sigma_S \hat{f}^3_S \tau_S \right] = \]
\[ = E \left[ \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}^1_S \hat{f}^2_S \hat{f}^3_S + \sum_{S,T,R \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}^1_S \hat{f}^2_T \hat{f}^3_R \sigma_{S \cup R \cup T \cup R} \right] = \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \hat{f}^1_S \hat{f}^2_S \hat{f}^3_S. \]

\[ \text{Лемма 11.} \]
\[ \left| \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}^1_S \hat{f}^2_S \hat{f}^3_S \right| \leq \max_{i \in \{1, \ldots, m\}} P(\{x \in \{-1, +1\}^m : x \text{ является } i\text{-критической для } f^1\}). \]

\[ \text{Доказательство.} \quad \text{Из неравенства Коши-Буняковского-Шварца, следствия 1, а также лемм 5, 8 и 7 имеем} \]
\[ \left| \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}^1_S \hat{f}^2_S \hat{f}^3_S \right| \leq \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} \sum_{S \neq \emptyset} |\hat{f}^2_S| |\hat{f}^3_S| |\hat{f}^3_S| \leq \max_{S \neq \emptyset} |\hat{f}^1_S| \sum_{S \subset \{1, \ldots, m\}} |\hat{f}^2_S| |\hat{f}^3_S| \leq \max_{S \neq \emptyset} |\hat{f}^1_S| \sqrt{\text{Var}(f^2) \text{Var}(f^3)} \leq \max_{S \neq \emptyset} |\hat{f}^1_S| = \max_{i \in \{1, \ldots, m\}} \hat{f}^1_{\{i\}} = \max_{i \in \{1, \ldots, m\}} P(\{x \in \{-1, +1\}^m : x \text{ является } i\text{-критической для } f^1\}). \]

\[ \text{Лемма 12. Для любой клетки } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ множества } M_n \text{ выполнено} \]
\[ P(\{x \in \{-1, +1\}^m : x \text{ является } i\text{-критической для } f^1\}) \leq \]
\[ \leq \min\{P(\{x \in \{-1, +1\}^m : x \text{ существует протекание из клетки } i \text{ до стороны 1}\}), 
\[ P(\{x \in \{-1, +1\}^m : x \text{ существует протекание из клетки } i \text{ до стороны 4}\})\}. \]
Доказательство. В произвольной \( i \)-кратичной раскраске \( x \) некоторую клетку стороны 1 можно соединить с некоторой клеткой стороны 4 цепочкой соседних по стороне клеток, каждая из которых имеет цвет +1. Но в этой цепочке клеток обязательно должна быть клетка \( i \), так как при изменении знака в этой клетке протекания между сторонами нет. Значит, данную цепочку клеток можно разбить на две других цепочки, в одной из которых есть протекание из клетки \( i \) до стороны 1, а в другой — протекание из клетки \( i \) до стороны 4. Отсюда получаем требуемое неравенство.

4.3. Завершение доказательства

Пусть \( i \in M_n \) — произвольная клетка (см. рис. 2a). Обозначим через \( r(i) \) максимальное расстояние от центра клетки \( i \) до прямых, содержащих стороны 1 и 4 шестиугольника \( P \). Обозначим через \( P(i) \) прямоугольник \( 2r(i) \times 8r(i) \) с центром в центре клетки \( i \), большая сторона которого содержит сторону 1 или 4 шестиугольника \( P \) (см. рис. 2b). Далее без ограничения общности полагаем, что эта сторона прямоугольника содержит сторону 1 шестиугольника.

Лемма 13. Шестиугольник \( P \) целиком содержится в прямоугольнике \( P(i) \).

Доказательство. (См. рис. 2c). Введём такую прямоугольную систему координат с центром в центре клетки \( i \), что ось \( x \) параллельна прямой, содержащей сторону 1. Тогда прямоугольник \( 2r(i) \times 8r(i) \) задаётся системой

\[
\begin{align*}
-4r(i) & \leq x \leq 4r(i), \\
-r(i) & \leq y \leq r(i).
\end{align*}
\] (3)

"Большая диагональ" (см. рис. 2d) шестиугольника \( P \) равна 2, поэтому шестиугольник \( P \) заведомо содержится внутри прямоугольника

\[
\begin{align*}
-2 & \leq x \leq 2, \\
-r(i) & \leq y \leq r(i).
\end{align*}
\] (4)

"Малая диагональ" (см. рис. 2d) шестиугольника \( P \) равна \( \sqrt{3} \), поэтому \( r(i) \geq \sqrt{3}/2 \). Значит, если точка \((x, y)\) удовлетворяет неравенствам (4), то она также удовлетворяет неравенствам (3).

Добавим к множеству \( M_n \) все клетки решётки, которые содержатся в прямоугольнике \( P(i) \). Получим новое множество \( M'_n \). Будем обозначать раскраски множества \( M'_n \) в 2 цвета \pm 1 как точки множества \( \{-1, +1\}^{M'_n} \).
Лемма 14. Выполнены неравенства:

\[
P(\{x \in \{-1, +1\}^m : \text{для } x \text{ существует протекание из клетки } i \text{ до стороны 1}\}) \leq P(\{x \in \{-1, +1\}^{M_n} : \text{для } x \text{ существует протекание из клетки } i \text{ до стороны 1}\}) \leq P(\{x \in \{-1, +1\}^{M'_n} : \text{для } x \text{ существует протекание из клетки } i \text{ до границы } M'_n\}).
\]

Доказательство. По лемме 13 получаем, что \(M_n \subset M'_n\). Первое неравенство следует из того, что если в раскраске \(x \in \{-1, +1\}^m\) существует искомое протекание, то протекание существует во всех раскрасках \(y \in \{-1, +1\}^{M_n}\), которые совпадают с раскраской \(x\) на множество \(M_n\).

Докажем второе неравенство. Если в какой-нибудь раскраске множество \(M_n\) существует протекание из клетки \(i\) до стороны 1, то по лемме 13 в этой же раскраске существует протекание из клетки \(i\) до границы множества \(M'_n\).

Лемма 15. Выполнены неравенства

\[
\min\{P(\{x \in \{-1, +1\}^m : \text{для } x \text{ существует протекание из клетки } i \text{ до стороны 1}\}),
\]

\[
P(\{x \in \{-1, +1\}^m : \text{для } x \text{ существует протекание из клетки } i \text{ до стороны 4}\}) \leq P(\{\text{в множестве } M_n \text{ существует протекание из клетки } O \text{ до границы}\}).
\]

Доказательство. Рассмотрим правильный шестиугольник с центром в центре клетки \(i\), полученный из шестиугольника \(P\) параллельным переносом. Из того, что \(r(i) \geq \sqrt{3}/2\) (см. рис. 2d) следует, что построенный шестиугольник целиком содержится в прямоугольнике \(P(i)\). С учётом этого из леммы 14 получаем требуемое.

Доказательство теоремы 1. Теорема 1 непосредственно получается из следствия 3, лемм 11, 12 и 15 и теоремы 2.

### 4.4. Аргументы в пользу истинности гипотезы 3

В завершение приведём неформальные аргументы в пользу истинности гипотезы 3. В вырожденном случае, при котором шестиугольник \(P\) состоит из одной клетки, выполнено \(\frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)P(A_3)} = 1\). В примере 1 множество \(M_n\) стало больше, и теперь \(\frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)P(A_3)} > 1\). Можно предположить, что при увеличении количества клеток в множестве \(M_n\) искомое отношение тоже увеличивается. Следующий более сильный аргумент принадлежит К. Изьюрову.

Рассмотрим следующую функцию от раскраски \(x \in \{-1, +1\}^m\):

\[
\chi(x) = \chi(x_1, \ldots, x_m) = \begin{cases} 1, & \text{если в раскраске } x \text{ существует протекание между центром и границей;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}
\]

Сформулируем без доказательства лемму. (Доказательство аналогично доказательству леммы 10.)

Лемма 16. \(P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \sum_{S \subseteq \{1, \ldots, m\}} \hat{\chi}^3_S \).

Следствие 4. \(P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \sum_{S \subseteq \{1, \ldots, m\} \setminus \emptyset} \hat{\chi}^3_S \).

Значит, гипотезы 2, 3 утверждают, что

\[
\sum_{S \subseteq \{1, \ldots, m\} \setminus \emptyset} \hat{\chi}^3_S > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{S \subseteq \{1, \ldots, m\} \setminus \emptyset} \left(\frac{\hat{\chi}^3_S}{\hat{\chi}_\emptyset}\right)^3 > 0.
\]
Последнее выражение содержит, в частности,
\[
\sum_{s \text{ соседня с центром } O} \left( \frac{\chi_{s}}{\chi_{\emptyset}} \right)^{3}.
\]

Из этих 6 клеток рассмотрим какую-нибудь клетку \(i\). Коэффициент \(\chi_{\{i\}}\) равен вероятности того, что случайная раскраска \(i\)-критическая. Легко убедиться, что условная вероятность \(i\)-критичности при условии протекания (т.е. \(\chi_{\{i\}}/\chi_{\emptyset}\)) весьма мала, но при этом положительна и не стремится к нулю при больших \(n\). Так что эти 6 слагаемых дают вклад, который сам по себе не исчезает в пределе (и искомый предел может быть равен 0, только если этот вклад магическим образом сократится со старшими коэффициентами Фурье-Уэлша, для чего не видно оснований). Поскольку вклад маленький, точность численных экспериментов не позволяет его увидеть.

5. Численные эксперименты

Для проверки гипотез 2-3 о протекании из центра была написана компьютерная программа (см. текст программы на C++ в [6]).

Каждая сторона шестиугольника \(P\) была выбрана параллельной некоторой стороне клетки решётки. Программа рассматривает \(k\) случайных раскрасок многоугольника \(M_{n}\), и в зависимости от введённого значения \(p\) вычисляет либо количество раскрасок \(T_{1}\), в которых жидкость 1 протекает из центра до границы (при \(p = 1\)), либо количество раскрасок \(T_{2}\), в которых жидкости 1 и 2 протекают из центра до границы (при \(p = 2\)), либо количество раскрасок \(T_{3}\), в которых все три жидкости 1, 2 и 3 протекают из центра до границы (при \(p = 3\)):

| Вход | Выход |
|------|-------|
| \(n\) | \(T_{p}\) |
| \(k\) |       |
| \(p\) |       |

Результаты работы программы для некоторых \(n, k\) и \(p\) показаны в таблице 2. Дополнительно там приведено значение \(P = (T_{3}/k)/(T_{1}/k)^{3} \approx \frac{P(A_{1,n} \cap A_{2,n} \cap A_{3,n})}{P(A_{1,n})P(A_{2,n})P(A_{3,n})}\). Наличие значений \(P < 1\) не позволяет опровергнуть гипотезу 2, так как может быть вызвано погрешностью в вычислении вероятности. При \(n = 500, k = 1000000, p = 1\) программа работает приблизительно 2 часа.
Таблица 2: Результаты работы программы

| n  | k           | T₁          | T₂          | T₃          | P       | P − 1    |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|---------|----------|
| 3  | 10 000 000 | 9 844 112   | 9 690 354   | 9 538 785   | 1.000   | <0.001   |
| 4  | 10 000 000 | 9 843 390   | 9 691 475   | 9 537 528   | 1.000   | <0.001   |
| 5  | 10 000 000 | 9 655 567   | 8 985 300   | 8 009 425   | 1.001   | 0.001    |
| 6  | 10 000 000 | 9 575 758   | 8 778 158   | 8 229 285   | 1.001   | 0.001    |
| 7  | 10 000 000 | 9 285 683   | 8 630 914   | 8 016 759   | 1.001   | 0.001    |
| 8  | 10 000 000 | 9 211 830   | 8 475 622   | 7 813 657   | 1.000   | <0.001   |
| 10 | 10 000 000 | 8 998 951   | 7 893 907   | 7 030 482   | 0.998   | -0.002   |
| 11 | 10 000 000 | 8 657 067   | 7 466 236   | 6 462 095   | 0.996   | -0.004   |
| 12 | 10 000 000 | 8 461 617   | 7 166 402   | 6 016 836   | 0.993   | -0.007   |
| 13 | 1 000 000  | 787 626     | 621 883     | 490 967     | 1.005   | 0.005    |
| 14 | 1 000 000  | 733 994     | 539 606     | 395 491     | 1.000   | <0.001   |
| 15 | 1 000 000  | 707 948     | 500 289     | 354 320     | 0.999   | -0.001   |
| 16 | 1 000 000  | 681 800     | 466 133     | 318 058     | 1.004   | 0.004    |
| 17 | 1 000 000  | 660 490     | 429 462     | 283 512     | 0.984   | -0.016   |
| 18 | 1 000 000  | 633 621     | 402 712     | 259 337     | 1.019   | 0.019    |
| 19 | 1 000 000  | 621 187     | 386 527     | 242 821     | 1.013   | 0.013    |
| 20 | 1 000 000  | 555 244     | 299 740     | 166 587     | 0.973   | -0.027   |

Опишем алгоритм, определяющий, протекает ли жидкость 1 из центра O до границы в заданной раскраске. Поскольку цвет центра не имеет значения, то мы будем считать, что этот цвет 0 (см. примеры в таблице 3).

Рассмотрим некоторую раскраску. Посадим в центр жука, способного переходить в соседние клетки цвета 0 или 1. Мы хотим узнать, может ли жук достичь граничной клетки.

Шаг 1. Если жук уже в граничной клетке, то переходим в КОНЕЦ1. Иначе переходим к Шагу 2.

Шаг 2. Если цвет клетки под жуком 0 или 1, то двигаем жука вниз, и переходим к Шагу 1. Если цвет клетки под жуком 2 или 3, то переходим к Шагу 3.

Шаг 3. (Построение стены; см. таблицу 3.) Построим ломаную (впоследствии называемую стеной), идущую по сторонам клеток (называемых сегментами стены) следующим образом. Перым звеном является нижняя сторона клетки, в которой жук находится в данный момент. Второе звено примыкает к левому краю первого. Все клетки по одну сторону стены имеют цвет 0 или 1, а все клетки по другую сторону стены — цвет 2 или 3. Наконец, либо последний сегмент стены лежит между двумя граничными клетками, либо все сегменты стены окружают какую-нибудь часть клеток в Mₙ. В первом случае переходим в КОНЕЦ1, во втором случае переходим к Шагу 4.

(Легко видеть, что стена однозначно определяется указанными условиями.)

Шаг 4. Проведём луч из центра множества Mₙ вниз. Если луч пересекает нечётное число сегментов стены (которые были построены в Шаге 3), то переходим в КОНЕЦ2. В противном случае рассмотрим самый нижний сегмент стены, пересекающийся с лучом. Передвинем жука в клетку, находящуюся под этим сегментом, и переходим к Шагу 1.

КОНЕЦ1. Жидкость 1 протекает из центра до границы.
КОНЕЦ2. Жидкость 1 не протекает из центра до границы.

Таблица на следующей странице показывает, как работает алгоритм. Во всех трёх примерах n = 7.
Таблица 3: Алгоритм проверки наличия протекания

| Пример 1 | Пример 2 | Пример 3 |
|----------|----------|----------|
| Изначально жук сидит в центре. | Изначально жук сидит в центре. | Изначально жук сидит в центре. Он не может двигаться вниз, поэтому мы устанавливаем сегмент стены под ним. |
| Жук двигается вниз до тех пор, пока не упрется в синюю клетку. Ставим сегмент стены под жуком. | Жук двигается вниз до тех пор, пока не упрется в красную клетку. Ставим сегмент стены под жуком. | Строим стену, пока она не окружит некоторую часть множества $M_7$. |
| Строим стену до тех пор, пока не поставим сегмент стены между двумя соседними границными клетками. | Строим стену, пока она не окружит некоторую часть множества $M_7$. | Проводим луч из центра вниз. Этот луч пересекает только один сегмент стены, следовательно, жук не может достичь границы. |
| Идя вдоль стены, жук может достичь границы. | | Жук обходит стену. Затем он двигается вниз и достигает границы. |
6. Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю М. Скопенкову за постановку задач и постоянное внимание к данной работе. Также автор благодарит К. Изъярову, А. Магазинова и М. Христофорова, прочитавших данную работу и приславших ценные замечания. Автор благодарит К. Изъярову и А. Магазинова за то, что рассказали доказательство теоремы 1.

Литература

[1] R. O’Donnell. Analysis of Boolean functions. Cambridge University Press, New York, 2014.
[2] H. Kesten, Percolation theory for mathematicians, Birkhäuser, Boston, 1982.
[3] H. Duminil-Copin, Introduction to Bernoulli percolation, https://www.ihes.fr/~duminil/publi/2017percolation.pdf, 2018.
[4] G. Grimmet, Percolation (2. ed). Springer Verlag, 1999.
[5] A. Yadin, Percolation. https://www.math.bgu.ac.il/~yadina/percolation.pdf.
[6] https://github.com/IVNov/percolation-in-hexagonal-lattice/blob/master/PPercolation.cpp.