In this note we present a symbolic pseudo-differential calculus on the Heisenberg group. We particularise to this group our general construction [4,2,3] of pseudo-differential calculi on graded groups. The relation between the Weyl quantisation and the representations of the Heisenberg group enables us to consider here scalar-valued symbols. We find that the conditions defining the symbol classes are similar but different to the ones in [1]. Applications are given to Schwartz hypoellipticity and to subelliptic estimates on the Heisenberg group.

© 2014 The Authors. Published by Elsevier Masson SAS on behalf of Académie des sciences. This is an open access article under the CC BY license (http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/).

Dans cette note, nous présentons un calcul pseudo-différentiel symbolique sur le groupe de Heisenberg. Nous particularisons à ce groupe notre construction générale [4,2,3] des calculs pseudo-différentiels sur les groupes de Lie gradués. Le lien entre la quantification de Weyl et les représentations du groupe de Heisenberg nous permet de considérer, dans ce cas, des symboles à valeurs scalaires. Nous trouvons que les conditions qui définissent les classes de symboles sont similaires, mais différentes de celles dans [1]. Comme applications, nous obtenons des résultats d’hypoellipticité de type Schwartz ainsi que des estimations subelliptiques sur le groupe de Heisenberg.

© 2014 The Authors. Published by Elsevier Masson SAS on behalf of Académie des sciences. This is an open access article under the CC BY license (http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/).

Version française abrégée

Dans [4], voir aussi [2,3], un calcul pseudo-différentiel est développé sur tout groupe gradué en utilisant les représentations de ces groupes. Ici, nous présentons nos résultats dans le cas particulier du groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_n$.

Il est bien connu que les représentations de $\mathbb{H}_n$ sont intimement liées à la quantification de Weyl (voir [8] et la section 2 en anglais ci-dessous). Grâce à l’analogie de la quantification de Kohn–Nirenberg sur les groupes de Lie (voir par exemple [8, 6,4] et la section 4 en anglais ci-dessous), cela permet de développer un calcul pseudo-différentiel sur $\mathbb{H}_n$ avec symboles à valeurs scalaires qui dépendent de paramètres. Cependant, une difficulté persiste : celle de trouver les conditions que l’on doit imposer sur ces symboles pour que la classe d’opérateurs qui en résulte ait bien les propriétés attendues d’un calcul d’opérateurs.
Bien que M. Taylor ait expliqué ces grandes lignes d'idées dans [8], son choix fut de restreindre son analyse dans [8] principalement au cas d'opérateurs invariants (c'est-à-dire de convolution) sur $\mathbb{H}_n$ avec des symboles définis par des développements asymptotiques. Jusqu'à ce jour, à la connaissance des auteurs de cette note, seule une étude porte sur des calculs non-invariants sur $\mathbb{H}_n$ avec symboles à valeurs scalaires : celle de H. Bahouri, C. Fermanian-Kammerer et I. Gallagher [1]. Leur travail traite uniquement du cas de $\mathbb{H}_n$. De plus, les conditions imposées sur leurs symboles peuvent sembler difficiles à appréhender aux yeux de certains lecteurs, car elles proviennent de parties techniques dans les démonstrations des propriétés du calcul (voir la version plus récente de [1] sur le serveur Hal).

Notre approche pour trouver les conditions à imposer sur les symboles est différente de celles de [8] et de [1] : nous particularisons au groupe de Heisenberg notre définition des calculs pseudo-différentiels, qui est valide sur une large classe de groupes de Lie nilpotents, plus précisément sur tout groupe gradué, voir [4,2,3]. Dans notre construction générale, les symboles sont à valeurs dans des classes d'opérateurs. Cependant, sur $\mathbb{H}_n$, grâce au lien entre la quantification de Weyl et les représentations de $\mathbb{H}_n$, cela est équivalent à utiliser des symboles à valeurs scalaires.

L'objectif de cette note est de présenter ce que les conditions sur les symboles données dans le cas général [4,2,3] dévienennent lorsqu'elles sont exprimées au niveau des symboles à valeurs scalaires dans le cas du groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_n$. En particulier, nous trouvons des conditions similaires, mais différentes de celles de [1].

Dans la version française, nous donnons uniquement les conditions sur les symboles à valeurs scalaires. La version anglaise est plus complète : elle contient, en particulier, les démonstrations de certaines parties techniques dans notre version de la version de [1]. Leur travail traite uniquement du cas de symboles à valeurs scalaires.

Nous réalisons le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_n$ comme la variété $\mathbb{R}^{2n+1}$ équipée de la loi de groupe

$$gg' = (x + x', y + y', t + t' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)) \quad g = (x, y, t), \quad g' = (x', y', t') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{2n+1}.$$

Nous adoptions ici la convention selon laquelle, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, alors $xy := \sum_{j=1}^n x_jy_j$ est leur produit scalaire standard. La base canonique de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_n$ de $\mathbb{H}_n$ est donnée par les champs de vecteurs invariants à gauche :

$$X_j = \partial_{x_j} - \frac{Y_j}{2} \partial_t, \quad Y_j = \partial_{y_j} + \frac{X_j}{2} \partial_t, \quad j = 1, \ldots, n, \text{ et } T = \partial_t.$$

Nous modifions la notation pour un indice $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2n+1}$ pour écrire $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ avec :

$$\alpha_1 = (\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,n}) \in \mathbb{N}_0^n, \quad \alpha_2 = (\alpha_{2,1}, \ldots, \alpha_{2,n}) \in \mathbb{N}_0^n, \quad \alpha_3 \in \mathbb{N}_0.$$

Le degré d'homogénéité de $\alpha$ est $|\alpha| := |\alpha_1| + |\alpha_2| + 2|\alpha_3|$. Nous écrivons aussi $X^\alpha = X^{|\alpha_1|} Y^{\alpha_2} T^{\alpha_3}$, où $X^{|\alpha_1|} = X^{a_1} \ldots X^{a_n}$, et $Y^{\alpha_2} = y^{a_1} \ldots y^{a_n}$.

Nous nous intéressons notamment à une classe d'opérateurs $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^{2n+1}} = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$ sur $\mathbb{R}^n$ normalisée par :

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n)),$$

et la quantification de Weyl $\text{Op}^W$, qui associe à un symbole raisonnable $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ l'opérateur défini par :

$$\text{Op}^W(a)(u) = a(D, X) f(u) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(u - v)\xi} a(\xi, u + \frac{v}{2}) f(v) dv \, d\xi,$$

où $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $u \in \mathbb{R}^n$.

Nous pouvons résumer la définition du calcul pseudo-différentiel sur le groupe de Heisenberg et certaines de ses propriétés sans faire référence au cas général des groupes gradués (voir la version en anglais pour cela) de la manière suivante.

**Théorème 0.1.** Soit $1 \geq \rho \geq \delta \geq 0$ avec $(\rho, \delta) \neq (0, 0)$. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, considérons la classe d'opérateurs $\Psi^m_{\rho, \delta}(\mathbb{H}_n)$ définie dans [4] pour tout groupe gradué, particulièrement ici au groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_n$ muni de sa structure naturelle de groupe stratifié. De manière équivalente, $\Psi^m_{\rho, \delta}(\mathbb{H}_n)$ est définie par (10) dans la partie en anglais.

(i) Alors, $\Psi^m_{\rho, \delta}(\mathbb{H}_n)$ coïncide avec la classe d'opérateurs $A$ sur $\mathbb{H}_n$ qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$A \varphi(g) = c'_n \int_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \text{Tr}(\text{Op}^W(a_{g, \lambda})(\varphi \cdot)(\sqrt{|\lambda| \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}))(\lambda)^m \, d\lambda.$$

où $a = a(g, \lambda, \xi, u) = a_{g, \lambda}(\xi, u)$ est une fonction infiniment dérivable sur $\mathbb{H}_n \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui satisfait, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n, \beta \in \mathbb{N}_0^{2n+1}$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0$,

$$|\beta^{\alpha} \partial_\beta \varphi(\lambda, \xi, u)| \leq C_{\alpha, \beta, \alpha, \beta, |\lambda|^{\frac{m|\alpha| + |\beta|}{2}} (1 + |\lambda| (1 + |\xi|^2 + |u|^2))^{\frac{m - 2|\alpha| + |\beta|}{2}}. (2)$$
and Section 2 below). Together with the analogue of the Kohn–Nirenberg quantisation on Lie groups (see e.g., [8, 6, 4], and 

The canonical commutation relations are:

\[ [X_j, Y_j] = T, \quad j = 1, \ldots, n. \]

and \( T \) is the centre of \( \mathfrak{h}_n \). The Heisenberg Lie algebra is stratified via \( \mathfrak{h}_n = V_1 \oplus V_2 \) where \( V_1 \) is linearly spanned by the \( X_j \)'s and \( Y_j \)'s, while \( V_2 = \mathbb{R} T \). Therefore, the group \( \mathbb{H}_n \) is naturally equipped with the family of dilations \( D_r \) given by:

\[ D_r(x, y, t) = r(x, y, r^2 t), \quad (x, y, t) \in \mathbb{H}_n, \quad r > 0. \]
The ‘canonical’ positive Rockland operator in this setting is \( \mathcal{R} = -\mathcal{L} \), where \( \mathcal{L} \) is the sub-Laplacian:

\[
\mathcal{L} := \sum_{j=1}^{n} (X_j^2 + Y_j^2) = \sum_{j=1}^{n} \left( \left( \partial_{x_j} - \frac{y_j}{2} \right)^2 + \left( \partial_{y_j} + \frac{x_j}{2} \right)^2 \right).
\]

The Schrödinger representations of the Heisenberg group \( \mathbb{H}_n \) are the infinite dimensional unitary representations of \( \mathbb{H}_n \) (we allow ourselves to identify unitary representations with their unitary equivalence classes). Parameterised by \( \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \), they act on \( L^2(\mathbb{R}^n) \). We denote them by \( \pi_\lambda \) and realise them as:

\[
\pi_\lambda(x, y, t) h(u) = e^{i\lambda(t + \frac{1}{2}xy)} e^{iy\sqrt{\lambda} u} h(u + \sqrt{\lambda} x),
\]

for \( h \in L^2(\mathbb{R}^n) \), \( u \in \mathbb{R}^n \), and \( (x, y, t) \in \mathbb{H}_n \), where we use the convention:

\[
\sqrt{\lambda} := \text{sgn}(\lambda) \sqrt{|\lambda|} = \begin{cases} \sqrt{|\lambda|} & \text{if } \lambda > 0, \\ -\sqrt{|\lambda|} & \text{if } \lambda < 0. \end{cases}
\]

The group Fourier transform of a function \( \kappa \in L^1(\mathbb{H}_n) \) is by definition:

\[
\hat{\kappa}(\pi_\lambda) \equiv \pi_\lambda(\kappa) := \int_{\mathbb{H}_n} \kappa(x, y, t) \pi_\lambda(x, y, t)^* \, dx \, dy \, dt.
\]

As already noted in [8], it can be effectively computed by:

\[
\pi_\lambda(\kappa)(h) = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \kappa(x, y, t) e^{i\lambda(-t + \frac{1}{2}xy)} e^{-iy\sqrt{\lambda} u} h(u - \sqrt{\lambda} x) \, dx \, dy \, dt,
\]

for \( h \in L^2(\mathbb{R}^n) \) and \( u \in \mathbb{R}^n \), that is,

\[
\hat{\kappa}(\pi_\lambda)(u) = \pi_\lambda(\kappa)(h)(u) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \text{Op}^W \left[ \mathcal{F}_{\mathbb{R}^{2n+1}}(\kappa) \left( \sqrt{|\lambda|}, \sqrt{\lambda} \cdot \cdot \lambda \right) \right].
\]

Here the Fourier transform \( \mathcal{F}_{\mathbb{R}^{2n+1}} = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^N} \) is defined via:

\[
\mathcal{F}_{\mathbb{R}^N} f(\xi) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ix\xi} \, dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^N, \ f \in L^1(\mathbb{R}^N)),
\]

and \( \text{Op}^W \) denotes the Weyl quantisation, which is given for a reasonable symbol \( a \) on \( \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \), by:

\[
\text{Op}^W(a) f(u) = a(D, X) f(u) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi - u)\xi} a(\frac{\xi + u}{2}) f(\nu) \, d\xi \, d\nu,
\]

where \( f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \) and \( u \in \mathbb{R}^n \). We keep the same notation \( \pi_\lambda \) for the corresponding infinitesimal representations. We readily compute that:

\[
\pi_\lambda(X_j) = \sqrt{|\lambda|} \partial_{u_j} = \text{Op}^W(i\sqrt{|\lambda|} \xi_j),
\]

\[
\pi_\lambda(Y_j) = i\sqrt{\lambda} u_j = \text{Op}^W(i\lambda \xi_j),
\]

\[
\pi_\lambda(T) = i\lambda, 1 = \text{Op}^W(i\lambda),
\]

thus

\[
\pi_\lambda(\mathcal{L}) = \sum_{j=1}^{n} \left( \pi_\lambda(X_j)^2 + \pi_\lambda(Y_j)^2 \right) = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} \left( \partial_{u_j}^2 - u_j^2 \right) = -\text{Op}^W \left( |\lambda| \sum_{j=1}^{n} (\xi_j^2 + u_j^2) \right).
\]

With our choice of notation and definitions, the Plancherel measure is \( c_n |\lambda|^n \, d\lambda \) in the sense that the Plancherel formula:

\[
\int_{\mathbb{H}_n} |\kappa(x, y, t)|^2 \, dx \, dy \, dt = c_n \int_{\mathbb{R} \backslash \{0\}} \| \pi_\lambda(\kappa) \|_{\mathcal{HS}}^2 |\lambda|^n \, d\lambda
\]

holds for any \( \kappa \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n) \). For the value of the constant \( c_n \), see [4]. Here \( \| \cdot \|_{\mathcal{HS}} \) denotes the Hilbert–Schmidt norm of an operator on \( L^2(\mathbb{R}^n) \), that is, \( \| B \|_{\mathcal{HS}}^2 = \text{Tr}(B^*B) \). This allows one to extend unitarily the definition of the group Fourier transform to \( L^2(\mathbb{H}_n) \). Formula (6) then holds for any \( \kappa \in L^2(\mathbb{H}_n) \).
3. Difference operators

Difference operators were defined in [6,7] as acting on Fourier coefficients on compact Lie groups, and on graded nilpotent Lie groups in [4]. In the setting of the Heisenberg group, this yields the definition of the difference operators $\Delta x_j$, $\Delta y_j$, and $\Delta t$ via:

$$\Delta x_j \tilde{\kappa}(\pi_\lambda) := \pi_\lambda(x_j \kappa), \quad \Delta y_j \tilde{\kappa}(\pi_\lambda) := \pi_\lambda(y_j \kappa), \quad \Delta t \tilde{\kappa}(\pi_\lambda) := \pi_\lambda(t \kappa),$$

for suitable distributions $\kappa$ defined on $\mathbb{H}_n$. We can compute that:

$$\Delta x_j |_{\pi_\lambda} = \frac{1}{i\lambda} \text{ad}(\pi_\lambda(Y_j)) = \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \text{ad } u_j,$$

$$\Delta y_j |_{\pi_\lambda} = -\frac{1}{i\lambda} \text{ad}(\pi_\lambda(X_j)) = -\frac{1}{i\sqrt{\lambda}} \text{ad } \partial u_j,$$

and

$$\Delta t |_{\pi_\lambda} = i \partial_t + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \Delta x_j \Delta y_j |_{\pi_\lambda} - \frac{i}{2\lambda} \sum_{j=1}^n (\pi_\lambda(Y_j) \Delta y_j |_{\pi_\lambda} + \Delta x_j |_{\pi_\lambda} \pi_\lambda(X_j)).$$

When $\pi_\lambda(\kappa) = \text{Op}^W(a_\lambda)$ and $a_\lambda = [a_\lambda(\xi, u)]$, we have:

$$\Delta x_j \pi_\lambda(\kappa) = \text{Op}^W\left(\frac{i}{\sqrt{|\lambda|}} \partial u_j a_\lambda\right),$$

$$\Delta y_j \pi_\lambda(\kappa) = \text{Op}^W\left(\frac{i}{\sqrt{\lambda}} \partial u_j a_\lambda\right),$$

$$\Delta t \pi_\lambda(\kappa) = i \text{Op}^W\left(\partial_{\kappa, \xi, u} a_\lambda(\xi, u)\right),$$

(7)

where

$$\partial_{\kappa, \xi, u} := \partial_{\kappa} - \frac{1}{2\lambda} \sum_{j=1}^n (u_j \partial u_j + \xi_j \partial u_j).$$

(8)

For example, we have:

$$\Delta x_j \pi_\lambda(Y_k) = \Delta x_j \pi_\lambda(T) = \Delta y_j \pi_\lambda(X_k) = \Delta y_j \pi_\lambda(T) = 0,$$

$$\Delta x_j \pi_\lambda(X_k) = \Delta y_j \pi_\lambda(Y_k) = -\delta_{jk} 1, \quad \Delta t \pi_\lambda(T) = -1,$$

$$\Delta x_j \pi_\lambda(\xi) = -2\pi_\lambda(X_j), \quad \Delta y_j \pi_\lambda(\xi) = -2\pi_\lambda(Y_j), \quad \Delta t \pi_\lambda(\xi) = 0.$$

The following equalities shed some light on why, for example in [1], another normalisation of the Weyl symbol is preferred. Indeed, the expressions on the right-hand sides in (7), in particular for the operator $\partial_{\kappa, \xi, u}$ defined in (8), become very simple.

**Lemma 3.1.** Let $a_\lambda = (a_\lambda(\xi, u))$ be a family of Weyl symbols depending smoothly on $\lambda \neq 0$. If $\tilde{a}_\lambda$ is the renormalisation obtained via

$$a_\lambda(\xi, u) := \tilde{a}_\lambda(1/\sqrt{|\lambda|}, \sqrt{\lambda} u),$$

then

$$\partial_{\kappa, \xi, u} a_\lambda(\xi, u) = \partial_{\kappa} \tilde{a}_\lambda(1/\sqrt{|\lambda|} \xi, \sqrt{\lambda} u),$$

and

$$\partial_{\kappa, \xi, u} a_\lambda(\xi, u) = \partial_{\kappa} \tilde{a}_\lambda(1/\sqrt{|\lambda|} \xi, \sqrt{\lambda} u).$$

Consequently,

$$\Delta x_j \pi_\lambda(\kappa) = i \text{Op}^W(\partial u_j \tilde{a}_\lambda), \quad \Delta y_j \pi_\lambda(\kappa) = i \text{Op}^W(\partial u_j \tilde{a}_\lambda) \quad \text{and} \quad \Delta t \pi_\lambda(\kappa) = i \text{Op}^W(\partial u_j \tilde{a}_\lambda).$$
4. Quantisation and symbol classes

In this note, for simplicity, we change slightly the notation with respect to the general case developed in [4]. Firstly we want to keep the letter $x$ to denote part of the coordinates of the Heisenberg group and we choose to denote a general element of the Heisenberg group by, e.g.,

$$g = (x, y, t) \in \mathbb{H}_n.$$ 

Secondly we may define a symbol as parameterised by:

$$\sigma (g, \lambda) := \sigma (g, \pi_{\lambda}), \quad (g, \lambda) \in \mathbb{H}_n \times \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$ 

Thirdly we modify the indices $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2n+1}$ in order to write them as:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

with

$$\alpha_1 = (\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,n}) \in \mathbb{N}_0^n, \quad \alpha_2 = (\alpha_{2,1}, \ldots, \alpha_{2,n}) \in \mathbb{N}_0^n, \quad \alpha_3 \in \mathbb{N}_0.$$ 

The homogeneous degree of $\alpha$ is then:

$$[\alpha] = |\alpha_1| + |\alpha_2| + 2\alpha_3.$$ 

For each $\alpha$ we write:

$$g^{\alpha} = x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} t^{\alpha_3}, \quad \text{where} \quad x^{\alpha_1} = x_1^{\alpha_{1,1}} \ldots x_n^{\alpha_{1,n}}, \quad y^{\alpha_2} = y_1^{\alpha_{2,1}} \ldots y_n^{\alpha_{2,n}},$$

and we define the corresponding difference operator:

$$\Delta^{\alpha} := \Delta x^{\alpha_1} \Delta y^{\alpha_2} \Delta t^{\alpha_3}, \quad \text{where} \quad \Delta x^{\alpha_1} := \Delta x_1^{\alpha_{1,1}} \ldots \Delta x_n^{\alpha_{1,n}}, \quad \Delta y^{\alpha_2} := \Delta y_1^{\alpha_{2,1}} \ldots \Delta y_n^{\alpha_{2,n}}.$$ 

We also write $X^{\alpha} = X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} T^{\alpha_3}$, where $X^{\alpha_1} = x_1^{\alpha_{1,1}} \ldots x_n^{\alpha_{1,n}}$, and $Y^{\alpha_2} = y_1^{\alpha_{2,1}} \ldots y_n^{\alpha_{2,n}}$.

Following [4], we define the symbol class $S_{\rho, \delta}^m (\mathbb{H}_n)$ as the set of symbols $\sigma$ for which all the following quantities are finite:

$$\|\sigma\|_{S_{\rho, \delta}^m} := \sup_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \, g \in \mathbb{H}_n} \|\sigma (g, \lambda)\|_{S_{\rho, \delta}^m}, \quad a, b, c \in \mathbb{N}_0,$$

where

$$\|\sigma (g, \lambda)\|_{S_{\rho, \delta}^m} := \sup_{|\beta| \leq \rho, |\gamma| \leq \delta} \|\sigma (g, \lambda) \pi_{\lambda} (1 - \mathcal{L})^{-1/2} A_{\delta} \Delta^{\alpha} \sigma (g, \lambda) \pi_{\lambda} (1 - \mathcal{L})^{-1/2}\|_{\mathfrak{op}}.$$

A natural quantisation on any type-I Lie group is the analogue of the Kohn–Nirenberg quantisation on $\mathbb{R}^n$, see, e.g., [8] for general remarks, [6] for the consistent development in the case of compact Lie group, and [4] for the case of nilpotent Lie groups. In the particular case of the Heisenberg group, this quantisation associates with a symbol $\sigma$ (for example in $S_{\rho, \delta}^m (\mathbb{H}_n)$) the operator $A = \text{Op}(\sigma)$ acting on $S(\mathbb{H}_n)$ given by:

$$A \varphi (g) = c_n \int \limits_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \text{Tr}(\pi_{\lambda}(g) \sigma (g, \lambda) \pi_{\lambda} (\varphi)) |\lambda|^{m} \, d\lambda.$$ 

(9)

Here we have used our notation, especially for the Plancherel measure $c_n |\lambda|^{m} \, d\lambda$, see (6). We denote by:

$$\psi_{\rho, \delta}^m (\mathbb{H}_n) := \{\text{Op}(\sigma), \, \sigma \in S_{\rho, \delta}^m (\mathbb{H}_n)\},$$

(10)

the class of operators corresponding to the symbols in $S_{\rho, \delta}^m (\mathbb{H}_n)$ via this quantisation.

The main result of this note shows that the symbols $\sigma = (\sigma (g, \lambda))$ in $S_{\rho, \delta}^m$ are all of the form $\sigma (g, \lambda) = \text{Op}^W (\alpha_{\lambda, g} (\xi, u))$ with $\alpha_{\lambda, g}$ (called $\lambda$-symbols) satisfying properties of the Shubin type as follows.
Theorem 4.1. Let $\rho, \delta$ be real numbers such that $1 \geq \rho \geq \delta > 0$ and $(\rho, \delta) \neq 0$.

(i) If $\sigma = \{a(g, \lambda, \xi, u)\}$ is in $S^m_{\rho, \delta}(\mathbb{H}_n)$, then there exists a unique smooth function $a = \{a(g, \lambda, \xi, u)\}$ on $\mathbb{H}_0 \times \mathbb{R}^{\{0\}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ such that:

$$\sigma(g, \lambda) = \text{Op}^W(a(g, \lambda)). \tag{11}$$

It satisfies for any $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n_0$, $\tilde{\alpha} \in \mathbb{N}_0$ and $\tilde{\alpha} \in \mathbb{N}_0$,

$$\left| \partial_\alpha^\beta \tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial_{\lambda, \xi, u}} \sigma(g, \lambda) \right| \leq C_{\alpha, \beta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}} \rho^{|\alpha| + |\beta|} \left| 1 + \lambda \left( 1 + |\xi|^2 + |u|^2 \right) \right|^{m - 2 + |\alpha + \beta| - |\alpha| - |\beta|}, \tag{12}$$

where the operator $\tilde{\alpha}, \xi, u$ was defined in (8).

(ii) Conversely, if $a = \{a(g, \lambda, \xi, u)\}$ is a smooth function on $\mathbb{H}_0 \times \mathbb{R}^{\{0\}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ satisfying (12) for every $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n_0$, $	ilde{\alpha} \in \mathbb{N}_0$, then there exists a unique symbol $\sigma \in S^m_{\rho, \delta}(\mathbb{H}_n)$ such that (11) holds.

(iii) The resulting class of operators $\bigcup_{m \in \mathbb{R}} S^m_{\rho, \delta}(\mathbb{H}_n)$ is an algebra of operators, the product being the usual composition. It is stable under taking the adjoint and contains the left-invariant differential calculus. Each operator $A \in \Psi^m_{\rho, \delta}(\mathbb{H}_n)$ maps continuously the Sobolev space $L^2_s(\mathbb{H}_n)$ of the Heisenberg group to $L^2_{s-m}(\mathbb{H}_n)$ with the loss of $m$ derivatives (for any $s \in \mathbb{R}$).

For the definition of the Sobolev spaces $L^2_s(\mathbb{H}_n)$ on $\mathbb{H}_n$ and more generally on any stratified group, see [5]. Part (iii) summarises the main results of the general construction made in [4] on any graded groups.

Let us notice that writing $\sigma(g, \lambda) = \text{Op}^W(a(g, \lambda))$ as in (11) and using (5) for:

$$\pi_\lambda(\psi) \pi_\lambda(g) = \pi_\lambda(\psi(g \cdot))$$

yield the following alternative formula for the quantisation given in (9):

$$A \psi(g) = c'_n \int_{\lambda \in \mathbb{R}^{\{0\}}} \text{Tr}(\text{Op}^W(a(g, \lambda))) \text{Op}^W \left[ F_{2^{2n+1}} \left( \psi(g \cdot) \left( \sqrt{\lambda} \cdot , \sqrt{\lambda} \cdot , \lambda \right) \right) \right] \lambda^{|\beta|} \text{d}\lambda. \tag{13}$$

For the value of the constant $c'_n$, see [4]. The formula (13) now involves mainly ‘Euclidean objects’.

5. Some applications

We finally note several applications of the above theorems to questions of hypoellipticity of (pseudo)-differential operators on the Heisenberg group. We say that a pseudo-differential operator $A$ is Schwartz hypoelliptic whenever $f \in S(\mathbb{H}_n)$. $Af \in S(\mathbb{H}_n)$ imply that $f \in S(\mathbb{H}_n)$. Then, for example, as a simple consequence of our calculus, we obtain that the operator $I - \mathcal{L}$ is Schwartz hypoelliptic. In fact, criteria can be given in terms of the $\lambda$-symbols.

Corollary 5.1. Let $m \in \mathbb{R}$ and $1 \geq \rho \geq \delta > 0$, $\rho \neq 0$. Let $\sigma = \{a(g, \lambda, \xi, u)\}$ be in $S^m_{\rho, \delta}(\mathbb{H}_n)$ with $\sigma(g, \lambda) = \text{Op}^W(a(g, \lambda))$ as in Theorem 4.1. Assume that there are $R \in \mathbb{R}$ and $C > 0$ such that, for any $(\xi, u) \in \mathbb{R}^{2n}$ and $\lambda \neq 0$ satisfying $|\lambda|(1 + |\xi|^2 + |u|^2) \geq R$, we have:

$$|a(g, \lambda, \xi, u)| \geq C \left( 1 + |\lambda| \left( 1 + |\xi|^2 + |u|^2 \right) \right)^{m/2}. \tag{14}$$

Then the operator $A$ in (9) (or, alternatively, in (13)) has a left parametrix, i.e. there exists $B \in \Psi^{-m}_{\rho, \delta}(\mathbb{H}_n)$ such that $BA - I \in \Psi^{-\infty}$.

Corollary 5.1 also has a corresponding ‘hypoellipticity version’ that we omit here, but we give a few examples of both of them. First, let $m, m_0 \in 2\mathbb{N}$ be two even integers such that $m \geq m_0$. Let $A$ be a differential operator given by either $X^m + iY^{m_0} + T^{m_0/2}$ or $X^{m_0} + iY^m + T^{m_0/2}$ on $\mathbb{H}_1$. Then $A$ is Schwartz hypoelliptic and satisfies the subelliptic estimates:

$$\forall s \in \mathbb{R}, \exists C > 0, \forall f \in S(\mathbb{H}_1), \|f\|_{L^p_s(\mathbb{H}_1)} \leq C\|Af\|_{L^p_s(\mathbb{H}_1)}.$$
Acknowledgements

The first author acknowledges the support of the London Mathematical Society via the Grace Chisholm Fellowship held at King’s College London in 2011 as well as of the University of Padua. The second author was supported in part by the EPSRC Leadership Fellowship EP/G007233/1 and both authors by EPSRC Grant EP/K039407/1.

References

[1] H. Bahouri, C. Fermanian-Kammerer, I. Gallagher, Phase-Space Analysis and Pseudodifferential Calculus on the Heisenberg Group, Astérisque, vol. 342, 2012. The revised version is at http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/78/57/92/PDF/phasespacefinal.pdf.
[2] V. Fischer, M. Ruzhansky, A pseudo-differential calculus on graded Lie groups, in: Fourier Analysis, in: Trends in Mathematics, Birkhäuser, 2014, pp. 107–132, arXiv:1209.2621.
[3] V. Fischer, M. Ruzhansky, Lower bounds for operators on graded Lie groups, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 351 (1–2) (2013) 13–18.
[4] V. Fischer, M. Ruzhansky, Quantization on Nilpotent Lie Groups, monograph in preparation.
[5] G.B. Folland, Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups, Ark. Mat. 13 (2) (1975) 161–207.
[6] M. Ruzhansky, V. Turunen, Pseudo-Differential Operators and Symmetries: Background Analysis and Advanced Topics, Birkhäuser, Basel, 2010.
[7] M. Ruzhansky, V. Turunen, Global quantization of pseudo-differential operators on compact Lie groups, SU(2) and 3-sphere, Int. Math. Res. Not. 11 (2013) 2439–2496, http://dx.doi.org/10.1093/imrn/rns122.
[8] M.E. Taylor, Noncommutative Microlocal Analysis. I, Mem. Am. Math. Soc., vol. 52, 1984.